

4.48 1)

Το Κ είναι μέσο του ΑΓ οπότε έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{5+1}{2}, \frac{7-1}{2}\right)$ ή $K(3,3)$

Το Λ είναι μέσο του ΑΒ οπότε έχει συντεταγμένες $\Lambda\left(\frac{5-3}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$ ή $\Lambda(1,4)$

Έστω ότι είναι $M(x_1, y_1)$. Τότε το μέσο Κ του ΒΜ έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{x_1-3}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right)$ και

επειδή ταυτίζεται με το σημείο $K(3,3)$ θα πρέπει $\frac{x_1-3}{2}=3$ και $\frac{y_1+1}{2}=3$. Λύνοντας τις

εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $x_1=9$ και $y_1=5$, άρα το Μ έχει συντεταγμένες $M(9,5)$

Ακόμη έστω ότι είναι $N(x_2, y_2)$. Τότε το μέσο Λ του ΓΝ έχει συντεταγμένες $\Lambda\left(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2-1}{2}\right)$

και επειδή ταυτίζεται με το σημείο $\Lambda(1,4)$ θα πρέπει $\frac{x_2+1}{2}=1$ και $\frac{y_2-1}{2}=4$. Λύνοντας τις

εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $x_2=1$ και $y_2=9$, άρα το Ν έχει συντεταγμένες $N(1,9)$

Έτσι έχουμε $\overrightarrow{AN}=(1-5, 9-7) \Rightarrow \overrightarrow{AN}=(-4, 2)$ και $\overrightarrow{AM}=(9-5, 5-7) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(4, -2)$

οπότε $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 8-8=0$ άρα $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AN}$ που σημαίνει ότι τα σημεία Μ, Α και Ν είναι συνευθειακά

4.48 2)

Το Κ είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ ή $K(-2,1)$.

Το Λ είναι το μέσο του ΑΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $\Lambda\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ ή $\Lambda(-1,3)$

Οπότε είναι $\overrightarrow{KL}=(-1-(-2), 3-1)=(1,2)$

Επίσης $\overrightarrow{BF}=(1-(-1), 4-0)=(2,4)$

Επομένως $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{KL} \Rightarrow \overrightarrow{BF} // \overrightarrow{KL}$ και $|\overrightarrow{KL}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

ενώ $|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4 \cdot 5}=2\sqrt{5}$ δηλαδή $|\overrightarrow{BF}|=2|\overrightarrow{KL}|$

Οπότε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

4.48 3)

Το Θ είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε έχει συντεταγμένες $\Theta\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$ ή $\Theta(3,1)$.

Το Η είναι το μέσο του ΔΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{4-4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$ ή $H(0,2)$

Το Ζ είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε έχει συντεταγμένες $Z\left(\frac{6-4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ ή $Z(1,0)$.

Το Ε είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ ή $E(4,-1)$

Άρα είναι $\overrightarrow{\Theta H}=(0-3, 2-1)=(-3,1)$ και $\overrightarrow{EZ}=(1-4, 0-(-1))=(-3,1)$

Δηλαδή $\overrightarrow{\Theta H}=\overrightarrow{EZ} \Rightarrow \overrightarrow{\Theta H} // \overrightarrow{EZ}$ και $|\overrightarrow{\Theta H}|=|\overrightarrow{EZ}|$

Επομένως το τετράπλευρο ΘΜΖΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, δηλαδή είναι παραλληλόγραμμο