

Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

3.23 1)

Έστω ότι $\kappa \neq 0$. Τότε $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \kappa \vec{a} = -\lambda \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{\kappa} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} // \vec{\beta}$ άτοπο διότι τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι

μη συγγραμικά (όχι παράλληλα)

Άρα είναι $\kappa = 0$

Ομοίως έστω ότι $\lambda \neq 0$. Τότε $\kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{\beta} = -\kappa \vec{a} \Rightarrow \vec{\beta} = -\frac{\kappa}{\lambda} \vec{a} \Rightarrow \vec{\beta} // \vec{a}$ άτοπο διότι τα $\vec{a}$ και

$\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμικά (όχι παράλληλα)

Άρα είναι και $\lambda = 0$

Οπότε τελικά $\kappa = \lambda = 0$

3.23 2)

$$\kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \mu \vec{a} + \nu \vec{\beta} \Leftrightarrow \kappa \vec{a} - \mu \vec{a} + \lambda \vec{\beta} - \nu \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow (\kappa - \mu) \vec{a} + (\lambda - \nu) \vec{\beta} = \vec{0}$$

και τώρα σύμφωνα με την άσκηση 1 θα είναι $\kappa - \mu = 0 \Rightarrow \kappa = \mu$ και $\lambda - \nu = 0 \Rightarrow \lambda = \nu$

3.23 3)

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα. Τότε θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \kappa \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} = \kappa \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} = \kappa (\vec{a} - 4\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\gamma} = \kappa \vec{a} - 4\kappa \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} - \kappa \vec{a} + 4\kappa \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \kappa) \vec{a} + (4\kappa) \vec{\beta} = \vec{0} \end{aligned}$$

και τώρα σύμφωνα με την άσκηση 1 θα είναι $1 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 1$ και $4\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 0$ άτοπο

(αφού δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα $\kappa = 1$ και $\kappa = 0$) επομένως τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι παράλληλα

3.23 4)

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ είναι παράλληλα. Τότε θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{\beta} &= \kappa (2\vec{a} - 3\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{a} + \vec{\beta} = 2\kappa \vec{a} - 3\kappa \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} + \vec{\beta} - 2\kappa \vec{a} + 3\kappa \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 2\kappa) \vec{a} + (1 + 3\kappa) \vec{\beta} = \vec{0} \end{aligned}$$

και τώρα σύμφωνα με την άσκηση 1 θα είναι $1 - 2\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}$ και $1 + 3\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{3}$ άτοπο

(αφού δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα $\kappa = \frac{1}{2}$ και $\kappa = -\frac{1}{3}$) επομένως τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα

3.23 5)

Επειδή $\vec{a} // \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \kappa \vec{a}$ (1)

Ακόμη επειδή $\vec{\beta} // \vec{\gamma} + \vec{a}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\vec{\gamma} + \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ (2)

Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\vec{\beta} - \vec{a} = \kappa \vec{a} - \lambda \vec{\beta} \Rightarrow \kappa \vec{a} + \vec{a} - \lambda \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow (\kappa + 1) \vec{a} + (-\lambda - 1) \vec{\beta} = \vec{0}$$

και τώρα σύμφωνα με την άσκηση 1 θα είναι $\kappa + 1 = 0 \Rightarrow \kappa = -1$ και $-\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

οπότε η σχέση (1) γίνεται $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = -\vec{a} \Rightarrow \vec{\gamma} = -\vec{a} - \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} = -(\vec{a} + \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\gamma} // (\vec{a} + \vec{\beta})$

3.23 6)

Επειδή $\vec{\beta} // (2\vec{a} - \vec{\gamma})$ θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $2\vec{a} - \vec{\gamma} = \kappa \vec{\beta}$ (1)

Ακόμη επειδή $\vec{\gamma} // (\vec{a} + \vec{\beta})$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\vec{\gamma} = \lambda (\vec{a} + \vec{\beta})$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$2\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Rightarrow 2\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \Rightarrow 2\vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta} - \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow (2 - \lambda)\vec{\alpha} + (-\kappa - \lambda)\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \text{και}$$

τώρα σύμφωνα με την άσκηση 1 θα είναι $2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ και $-\kappa - \lambda = 0 \Rightarrow \kappa = -\lambda = -2$

οπότε η σχέση (1) γίνεται $2\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = -2\vec{\beta} \Rightarrow 2\vec{\alpha} = \vec{\gamma} - 2\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{2}(\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\alpha} // (\vec{\gamma} - 2\vec{\beta})$