

Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

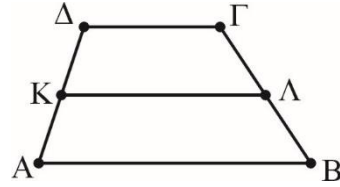
3.22 1)

Έχουμε ότι $\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΓΛ}$ (1)
και $\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΛ}$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$$2\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΓΛ} + \overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΛ} \Rightarrow 2\overrightarrow{ΚΛ} = (\overrightarrow{ΚΔ} + \overrightarrow{ΚΑ}) + (\overrightarrow{ΓΛ} + \overrightarrow{ΒΛ}) + \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} \Rightarrow$$

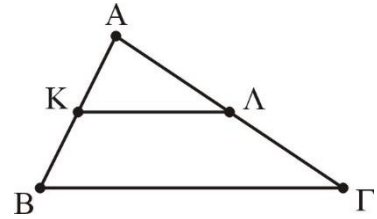
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΑΒ} \Rightarrow \overrightarrow{ΚΛ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}) \xrightarrow{\overrightarrow{ΔΓ} // \overrightarrow{ΑΒ}} ΚΛ // ΔΓ // ΑΒ \text{ και } ΚΛ = \frac{1}{2}(ΔΓ + ΑΒ)$$



3.22 2)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΑΛ} \quad \begin{matrix} \overrightarrow{ΚΑ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΑ} \\ \overrightarrow{ΑΛ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} \end{matrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΑ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΓ}) \xrightarrow{\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΒΓ}} \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΓ}$$



που σημαίνει ότι $ΚΛ // ΒΓ$ και $ΚΛ = \frac{1}{2}ΒΓ$

3.22 3)

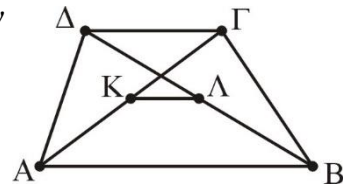
Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ // ΓΔ$, $ΑΒ > ΓΔ$) και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΔΒ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΛ} \quad \begin{matrix} \overrightarrow{ΚΑ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΓΑ} \\ \overrightarrow{ΒΛ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΔ} \end{matrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΓΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΔ} =$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \overrightarrow{ΓΑ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΑ} \\ \overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΔ} \end{matrix}} \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΑ}) + \overrightarrow{ΑΒ} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΔ}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΓΔ} + \cancel{\overrightarrow{ΔΑ}} + \overrightarrow{ΒΑ} + \cancel{\overrightarrow{ΑΔ}}) + \overrightarrow{ΑΒ} = \frac{\overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΒΑ}}{2} + \overrightarrow{ΑΒ} = \frac{\overrightarrow{ΓΔ} - \overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΒ}}{2} = \frac{\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΓ}}{2} \xrightarrow{\overrightarrow{ΑΒ} // \overrightarrow{ΔΓ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ΚΛ // ΑΒ // ΓΔ \text{ και } ΚΛ = \frac{ΑΒ - ΓΔ}{2}$$



3.22 4)

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΒ} + \overrightarrow{ΒΛ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΒ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΓ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ}$$

$$\overrightarrow{ΝΜ} = \overrightarrow{ΝΔ} + \overrightarrow{ΔΜ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΔ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΔΓ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ}$$

Επομένως

$$\left. \begin{matrix} \overrightarrow{ΚΛ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} \\ \overrightarrow{ΝΜ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΑΓ} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΝΜ}$$

άρα $ΚΛ // ΜΝ$ και $ΚΛ = ΜΝ$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο

