3.19 1)

α) Είναι $\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AZ}\overset{\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{5}\vec{\beta}\ ,\ \overrightarrow{AZ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{A\Gamma}}{=}-\frac{1}{5}\vec{\beta}+\frac{1}{6}\overrightarrow{A\Gamma}\overset{\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}}{=}-\frac{1}{5}\vec{\beta}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)\overset{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\ ,\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}}{=}$

$=-\frac{1}{5}\vec{\beta}+\frac{1}{6}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=-\frac{\vec{\beta}}{5}+\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}=\frac{-6\vec{\beta}+5\vec{\alpha}+5\vec{\beta}}{30}=\frac{5\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{30}$

Ακόμη $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\overset{\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{5}\vec{\beta}\ ,\ \overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}}{=}-\frac{1}{5}\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\frac{-\vec{\beta}+5\vec{\alpha}}{5}=\frac{5\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{5}$

β) Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{EZ}=\frac{5\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{30}\Rightarrow 6\overrightarrow{EZ}=\frac{5\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{5}\Rightarrow\overrightarrow{EB}=6\overrightarrow{EZ}\Rightarrow\overrightarrow{EB}//\overrightarrow{EZ}$

οπότε τα σημεία Ε , Ζ και Β είναι συνευθειακά

3.19 2)

α) Είναι $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Delta}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overset{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\ ,\ \overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}}{=}-\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}\overset{\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}}{=}-\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}=$

$=-\vec{\alpha}+\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}=\frac{-6\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}=\frac{-5\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}$

Ακόμη

$\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{5}\overrightarrow{A\Gamma}=\overset{\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}\ ,\ \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}}{=}-\frac{1}{3}\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}+\frac{1}{5}\vec{\beta}=-\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}+\frac{\vec{\beta}}{5}=$

$=\frac{-5\vec{\alpha}-5\vec{\beta}+6\vec{\beta}}{30}=\frac{-5\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{30}$

β) Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{-5\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{6}\Rightarrow\overrightarrow{B\Delta}=5\frac{-5\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{30}\Rightarrow\overrightarrow{B\Delta}=5\overrightarrow{\Delta E}\Rightarrow\overrightarrow{B\Delta}//\overrightarrow{\Delta E}$ οπότε τα σημεία Β , Δ και Ε είναι συνευθειακά

3.19 3)

α) Είναι $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}\overset{\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{3}\vec{\beta}\ ,\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}}{=}-\frac{1}{3}\vec{\beta}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}\overset{\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}}{=}-\frac{1}{3}\vec{\beta}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)\overset{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\ ,\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}}{=}$

$=-\frac{1}{3}\vec{\beta}+\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=-\frac{\vec{\beta}}{3}+\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{4}=\frac{-4\vec{\beta}+3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}}{12}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{12}$

Ακόμη

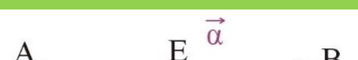
$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\overset{\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}\ ,\ \overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}}{=}-\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}+\vec{\alpha}\overset{\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}}{=}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)+\vec{\alpha}\overset{\substack{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}}}{=}-\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{4}+\vec{\alpha}=$

$=\frac{-\vec{\alpha}-\vec{\beta}+4\vec{\alpha}}{4}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{4}$

β) Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{EM}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{12}\Rightarrow 3\overrightarrow{EM}=\frac{3\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{4}\Rightarrow 3\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{EM}//\overrightarrow{MB}$ οπότε τα σημεία Ε , Μ και Β είναι συνευθειακά

3.19 4)

Έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Τότε είναι



$$\overrightarrow{\Delta O}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AO}\overset{\overrightarrow{\Delta A}=-\vec{\beta}\ ,\ \overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}}{=}-\vec{\beta}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}=$$

$$\overset{\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}}{=}-\vec{\beta}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)\overset{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}\ ,\ \overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}}{=}-\vec{\beta}+\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{3}=\frac{-3\vec{\beta}+\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{3}=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}{3}$$

Ακόμη

$$\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{AE}\overset{\overrightarrow{\Delta A}=-\vec{\beta}\ ,\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}{=}-\vec{\beta}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\overset{\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}}{=}-\vec{\beta}+\frac{1}{2}\vec{\alpha}=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}{2}$$

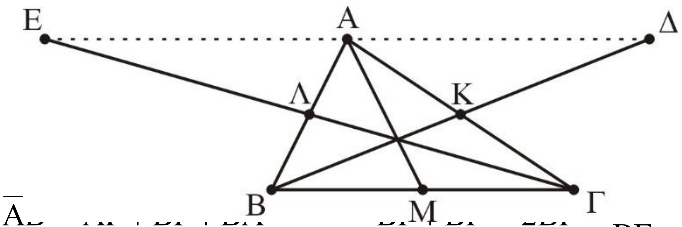
Επομένως

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta O}&=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}{3}\\ \overrightarrow{\Delta E}&=\frac{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}3\overrightarrow{\Delta O}&=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\\ 2\overrightarrow{\Delta E}&=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3\overrightarrow{\Delta O}=2\overrightarrow{\Delta E}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta O}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\Delta E}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta O}//\overrightarrow{\Delta E}$$

οπότε τα σημεία Δ , Ο και Ε είναι συνευθειακά

3.19 5)

Έχουμε



$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{E\Lambda}+\overrightarrow{\Lambda A}\overset{\overrightarrow{E\Lambda}=\overrightarrow{\Lambda\Gamma}\ ,\ \overrightarrow{\Lambda A}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}{=}\overrightarrow{\Lambda\Gamma}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$$

$$\overset{\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=-\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=-\frac{\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}}{2}}{=}-\frac{\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}}{2}=\frac{\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=\frac{2\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=\overrightarrow{B\Gamma}$$

Ακόμη

$$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{K\Delta}\overset{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}\ ,\ \overrightarrow{K\Delta}=\overrightarrow{BK}}{=}\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BK}\overset{\overrightarrow{BK}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}}{=}\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=\frac{\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}\overset{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}}{=}\frac{2\overrightarrow{B\Gamma}}{2}=\overrightarrow{B\Gamma}$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{EA}&=\overrightarrow{B\Gamma}\\ \overrightarrow{A\Delta}&=\overrightarrow{B\Gamma}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{A\Delta}\Rightarrow\overrightarrow{EA}//\overrightarrow{A\Delta}$$

οπότε τα σημεία Ε , Α και Δ είναι συνευθειακά