ΛΥΣΗ

α)

i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ. Επομένως οι συντεταγμένες του φάρου $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή είναι

$$\lambda x_\Phi + (1-\lambda) y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda x_\Phi + y_\Phi - \lambda y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_\Phi - y_\Phi)\lambda + y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_\Phi - y_\Phi = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = y_\Phi \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = -2 \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases}$$

Οπότε οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

<u>Δεύτερος τρόπος</u>

Γνωρίζουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο Φ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων του φάρου αρκεί να βρούμε το σημείο τομής δυο ευθειών της οικογένειας ε_λ.

Μια ευθεία της οικογένειας ε_λ προκύπτει για $\lambda = 1$ με εξίσωση $1x + (1-1)y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ και μια άλλη προκύπτει για $\lambda = 0$ με εξίσωση $0x + (1-0)y + 2 = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0$.

Για την εύρεση του κοινού σημείου Φ, των ευθειών με εξισώσεις $x + 2 = 0$ και $y + 2 = 0$, επιλύουμε το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

άρα οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Άρα υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε η ε_λ να διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$. Τότε οι συντεταγμένες του $\mathrm{O}(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ.

Έχουμε $\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$, άτοπο.

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Αν είναι $\mathrm{P}(x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ τότε ισχύει $y_\mathrm{P} > y_\Phi \Leftrightarrow y_\mathrm{P} > -2$ αφού το ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ.

Επειδή το σημείο P ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x + y + 4 = 0$ ισχύει $x_\mathrm{P} + y_\mathrm{P} + 4 = 0 \Leftrightarrow x_\mathrm{P} = -4 - y_\mathrm{P}$. Οπότε είναι $\mathrm{P}(-4 - y_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ με $y_\mathrm{P} > -2$.

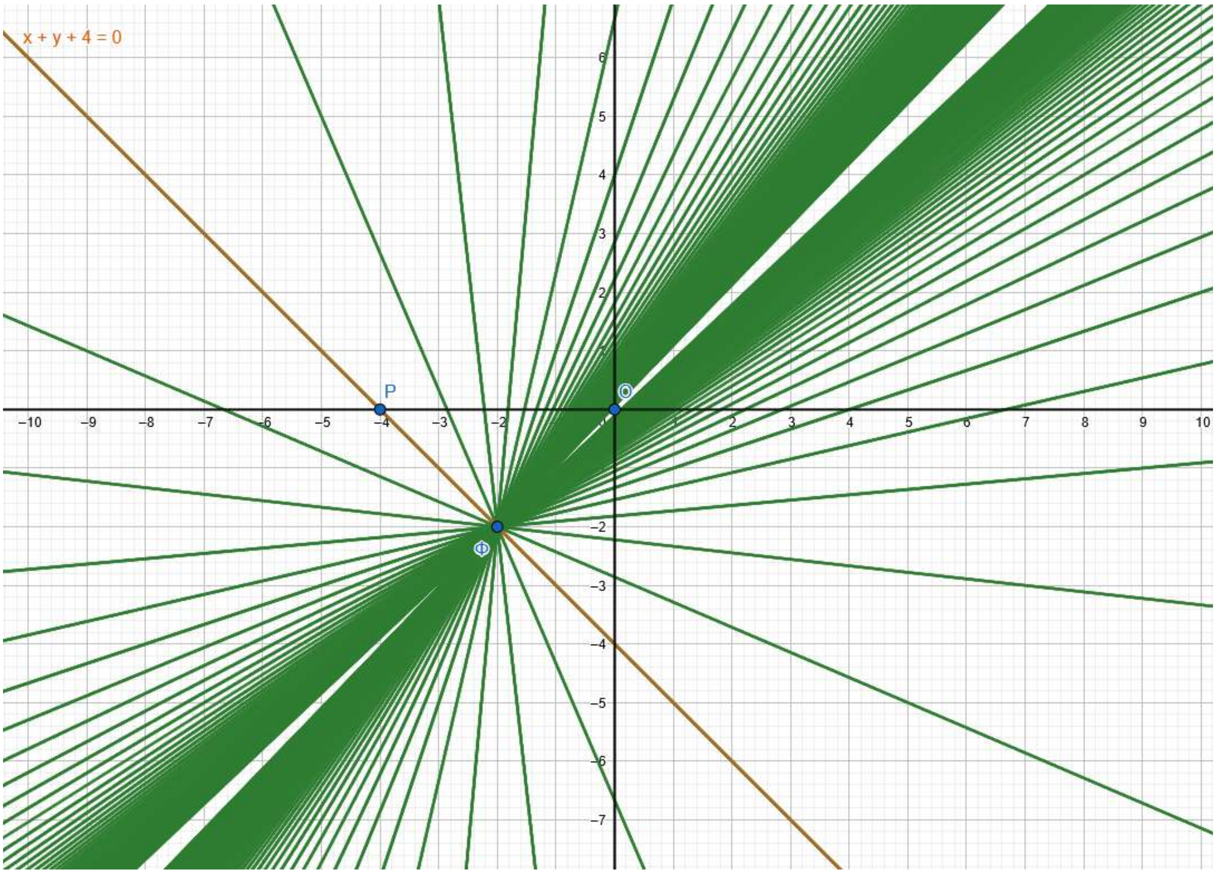
Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες.

Είναι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PO} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_\mathrm{O} - x_\mathrm{P})^2 + (y_\mathrm{O} - y_\mathrm{P})^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(0 - (-4 - y_\mathrm{P}))^2 + (0 - y_\mathrm{P})^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(4 + y_\mathrm{P})^2 + {y_\mathrm{P}}^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2{y_\mathrm{P}}^2 + 8y_\mathrm{P} + 16} = 4 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2{y_\mathrm{P}}^2 + 8y_\mathrm{P} + 16}\right)^2 = 4^2 \\
&\Leftrightarrow 2{y_\mathrm{P}}^2 + 8y_\mathrm{P} + 16 = 16 \\
&\Leftrightarrow 2{y_\mathrm{P}}^2 + 8y_\mathrm{P} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P}(y_\mathrm{P} + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P} = 0 \text{ ή } y_\mathrm{P} + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow y_\mathrm{P} = 0 \text{ ή } y_\mathrm{P} = -4
\end{aligned}
$$

Δεκτή είναι μόνο η $y_\mathrm{P} = 0 > -2$ αφού $-4 < -2$. Ακόμη είναι $x_\mathrm{P} = -4 - y_\mathrm{P} = -4 - 0 = -4$.

Τελικά, οι συντεταγμένες του ρυμουλκού πλοίου είναι $\mathrm{P}(-4,0)$.


x + y + 4 = 0
P
O