ΛΥΣΗ

α) Με $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_o: -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ με $\alpha=1$ έχουμε $\varepsilon_1: -3x-2y+5=0$.

Το κοινό τους σημείο προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $x=1$ και $y=1$. Άρα οι ευθείες ε_o, ε_1 τέμνονται στο σημείο $M(1, 1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1, 1)$. Με $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha=4$ ή $\alpha=0$ δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη στον $y'y$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 4$.

Με $x=0$ έχουμε: $y=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ με $y=0$ έχουμε $x=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα $A\left(\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha}, 0\right)$ και $B\left(0, \dfrac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\frac{\alpha+4}{4-\alpha}>0, \ (1) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha+4}{2\alpha}>0, \ (2)$$

Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow (\alpha+4)(4-\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha^2-16<0 \Leftrightarrow \alpha^2<16 \Leftrightarrow -4<\alpha<4, \text{ με } \alpha\neq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha+4)>0 \Leftrightarrow \alpha<-4 \text{ ή } \alpha>0, \text{ με } \alpha\neq 4$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία Α, Β είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε

$$(OA)=\frac{\alpha+4}{4-\alpha} \text{ και } (OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}.$$

Επομένως

$$(OA)=2(OB) \Leftrightarrow \frac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\frac{\alpha+4}{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha=4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$$