ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, όπου

$\mathrm{A}=\mu^2-1 \quad , \quad \mathrm{B}=3\mu^2-2\mu-1 \quad , \quad \Gamma=-5\mu^2+4\mu+1$

Για να παριστάνει ευθεία πρέπει οι Α, Β να μη γίνονται ταυτόχρονα 0.

$\mathrm{A}=0 \Leftrightarrow \mu^2-1=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ = -1 , $\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow 3\mu^2-2\mu-1=0 \Leftrightarrow$ μ= 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$

Συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του μ εκτός από την τιμή μ=1.

β)

i. Για να είναι παράλληλη στον xx' πρέπει $\mathrm{A}=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= -1. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ = -1.

ii. Για να είναι παράλληλη στον yy' πρέπει $\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ= $-\frac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το (0,0) πρέπει $\Gamma=0 \Leftrightarrow -5\mu^2+4\mu+1=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{5}$

Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\frac{1}{5}$.

γ) Για μ = -1 η (1) γίνεται $4y-8=0$ (ε_1).

Για μ = 0 η (1) γίνεται $-x-y+1=0$ (ε_2).

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Μ με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} 4y-8=0 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$ οπότε Μ (-1,2) .

Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2-1)\cdot(-1)+(3\mu^2-2\mu-1)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=-\mu^2+1+6\mu^2-4\mu-2-5\mu^2+4\mu+1=0$

οπότε συμπεραίνουμε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο Μ(-1,2).