ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, τότε:

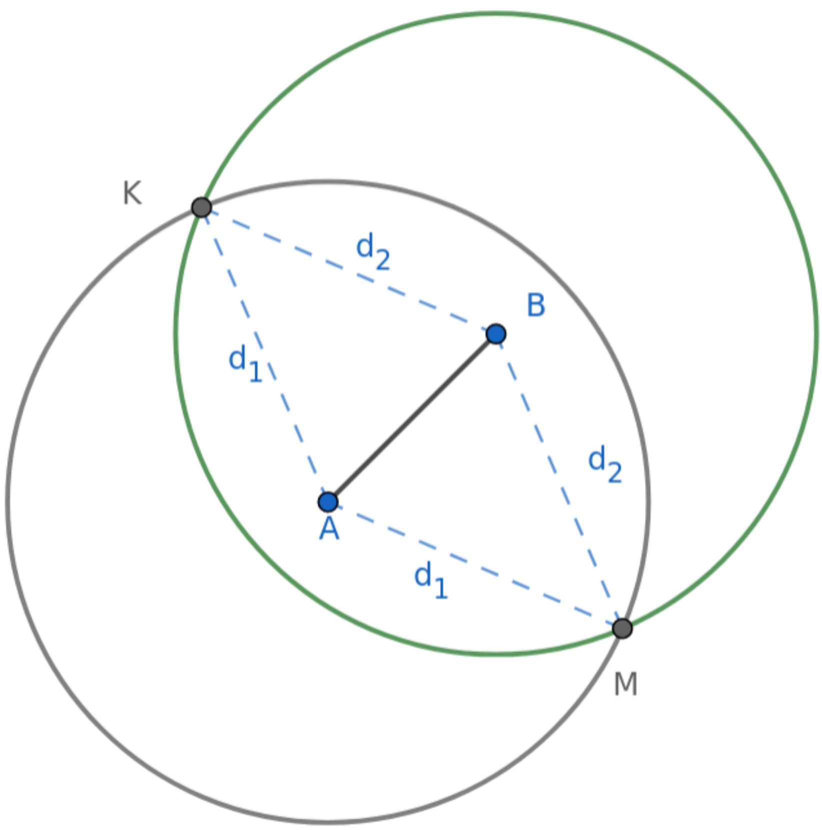
$d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

β) Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή ισχύει $d_1=d_2$.

γ) Ισχύει ότι

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2$$

Η τελευταία ισότητα παριστάνει τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες για τα σημεία τομής δύο κύκλων με κέντρα τα Α(1,1) και Β(3,3) αντίστοιχα και ίσες ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία Κ,Μ του σχήματος, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ.



Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση έχουμε:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$

$$-2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$$

Δηλαδή όλα τα σημεία $M(x,y)$, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB, ισοδύναμα ικανοποιούν τη σχέση $x+y-4=0$, η οποία είναι επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB.

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και στη συνέχεια η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο AB σε αυτό το σημείο.

δ) Για να είναι το τρίγωνο ΣAB ισόπλευρο, αρκεί $AB=d_1=d_2$ δηλαδή οι κύκλοι $(A,d_1),(B,d_2)$ να έχουν ακτίνα ίση με AB.

$d_1=d_2=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής του κύκλου με ακτίνα $d_1=2\sqrt{2}$ κέντρου A με τη μεσοκάθετο, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ x+y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(4-x-1)^2=8\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1+9-6x+x^2=8\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-8x+2=0\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-4x+1=0\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pm\sqrt{3}\\ y=4-(2\pm\sqrt{3})\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}) \text{ ή } (x,y)=(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$$

Δηλαδή βρήκαμε δύο σημεία Σ, το οποίο ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τα δύο σημεία συμμετρικά του AB.