ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 1 \end{cases}$. Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

Ομοίως η εξίσωση (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν

$\begin{cases} 3\lambda + 1 \neq 0 \\ \text{ή} \\ -2\lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq -\frac{1}{3} \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$. Επίσης δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

β) Έστω $\overrightarrow{\delta_1} = (\lambda-1, -\lambda)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$\lambda x+(\lambda-1)y-4=0 \text{ και}$$

$\overrightarrow{\delta_2} = (-2\lambda, -3\lambda-1)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0.$$

Οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν:

$$\overrightarrow{\delta_1} \perp \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda)-\lambda(-3\lambda-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2+\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda= -3)$$