ΛΥΣΗ

α) i) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2\alpha)$ και $B(4,\alpha)$ είναι

$$\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}=\frac{-\alpha}{1}=-\alpha\ ,$$

οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-2\alpha=-\alpha(x-3)$ ή $y-2\alpha=-\alpha x+3\alpha$ ή $y=-\alpha x+5\alpha.$

ii) Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha.$ Έχουμε διαδοχικά

$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha$ ή $1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$,

επίσης $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha$ ή $1=-\alpha^2+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii) Είναι $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A)=(4-3\,,\ \alpha-2\alpha\,)=(1\,,-\alpha\,)$ και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta\,,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha\ ,\ 1-\alpha-1)=(1\,,-\alpha\,)$.

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(1\,,-\alpha\,)$. Όμως από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Τότε, επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλα, επίσης θα έχουν ίσα μήκη, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο για κάποιο $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Τότε θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\overrightarrow{AB}=(1\,,-\alpha\,)$, άρα $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{1+\alpha^2}$. Επίσης είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A\,,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,1-2\alpha)$, άρα $|\overrightarrow{A\Delta}|=\sqrt{(\alpha-3)^2+(1-2\alpha)^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$.

Επομένως θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$ ή $\sqrt{1+\alpha^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$ ή $5\alpha^2-10\alpha+10=1+\alpha^2$ ή $4\alpha^2-10\alpha+9=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot4\cdot9=-44<0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.