ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot1+(-2)\cdot1=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-2)$, οπότε: $x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{K}}=2\Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}-2=2\Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}=4$.

$$y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{K}}=-2\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}-1=-2\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}=-1.$$

Άρα $\mathrm{A}(4,-1)$. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}=(1,1)$, οπότε: $x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{K}}=1\Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}-2=1\Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}=3$.

$$y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{K}}=1\Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}-1=1\Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}=2.$$

Άρα $\mathrm{B}(3,2)$.

ii. Η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned}
&y-2=\frac{2-(-1)}{3-4}\cdot(x-3)\Leftrightarrow\\
&y-2=-3\cdot(x-3)\Leftrightarrow\\
&3x+y=11.
\end{aligned}$$

Το σημείο $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$ είναι ένα σημείο της ευθείας AB, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $3x_\Gamma+y_\Gamma=11$.

iii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{K}\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\Leftrightarrow\\
&\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow\\
&(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta ii)}{\Leftrightarrow}\\
&(x_\Gamma-2)^2+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow\\
&5{x_\Gamma}^2-32x_\Gamma+\frac{203}{4}=0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 9 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3,5$ και $x_2 = 2,9$. Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB, η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4. Άρα $x_\Gamma = 3,5$ και $3 \cdot 3,5 + y_\Gamma = 11 \Leftrightarrow y_\Gamma = 0,5$.