ΛΥΣΗ

α) Με $\lambda=1$ έχουμε

$$y=x-2+1-2\Rightarrow y=x-3$$

ενώ με $\lambda=2$ έχουμε $y=2x-4$.

Οι συντεταγμένες του Μ προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x-3=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Επομένως το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι το $M(1,-2)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με $x=1$ η εξίσωση γράφεται

$$y=\lambda(1-2)+\lambda-2\Leftrightarrow y=-\lambda+\lambda-2\Leftrightarrow y=-2$$

οπότε πραγματικά κάθε ευθεία που προκύπτει από την δοσμένη εξίσωση διέρχεται από το Μ.

γ) i. Με $y=0$ στην δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\lambda(x-2)+\lambda-2=0\Leftrightarrow \lambda x-\lambda-2=0\Leftrightarrow \lambda x=\lambda+2\Leftrightarrow x=\frac{\lambda+2}{\lambda}$$

Προφανώς $\lambda\neq 0$, αφού με $\lambda=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Με $x=0$ στη δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$y=-2\lambda+\lambda-2\Leftrightarrow y=-\lambda-2$$

Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-\lambda-2)$ και τον $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$.

ii. Ισχύει: $(OA)=|-\lambda-2|=|\lambda+2|$, $(OB)=\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|=\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

είναι $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}$. Έτσι, έχουμε:

$$(OAB)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (\lambda+2)^2=|\lambda|$$

- Αν $\lambda>0$, τότε έχουμε:

  $\lambda^2+4\lambda+4=\lambda\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+4=0$, που δεν έχει πραγματικές ρίζες.

- Αν $\lambda<0$, τότε έχουμε:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -4$$