ΛΥΣΗ

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα που σχηματίζουν γωνία θ, με $0^o \le \theta \le 180^o$.

i) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συνθ} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{συνθ} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0^o \Leftrightarrow \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$.

ii) Οι ποσότητες $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$ είναι μη αρνητικές, οπότε:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συνθ} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{συνθ} = -1 \Leftrightarrow \theta = 180^o \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

β) Από υπόθεση έχουμε: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$.

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\gamma} = -\vec{\beta}$

Άρα,

$|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}| = |-\vec{\beta}| = 2 = 1 + 1 = |\vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}|$

Συνεπώς, από το α)i ερώτημα, $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\gamma}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

Άρα,

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = 1 = |1-2| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$

Συνεπώς, από το α)ii ερώτημα, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

iii) Αφού $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, υπάρχει $\lambda > 0$ και $\mu < 0$ τέτοια ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta} = \mu\vec{\alpha}$.

Στις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε μέτρα και έχουμε:

$|\vec{\gamma}| = \lambda|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}| = -\mu|\vec{\alpha}|$, αφού $|\lambda| = \lambda$ και $|\mu| = -\mu$.

Όμως, : $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε $\lambda = 1$ και $\mu = -2$.

Άρα, $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.