ΛΥΣΗ

α)

i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο θα πρέπει να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή αλλιώς τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = (λ , 1+1) = (λ ,2) και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ = (λ-2, λ-3+1) = (λ-2, λ-2) . Γνωρίζουμε ότι : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ // $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ ⇔ det ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$) = 0 ⇔ $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$= 0 ⇔ λ(λ-2) – 2 (λ-2) = 0 ⇔ $(\lambda-2)^2$ = 0 ⇔ λ = 2.

Δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι παράλληλα ⇔ λ = 2. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε τιμή του λ που είναι διαφορετική από το 2.

ii. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{A}}$ = 90^o, το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ θα ισούται με μηδέν.

Όμως $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ = 0 ⇔λ (λ − 2) + 2 (λ − 2) = 0 ⇔(λ + 2) (λ − 2) = 0 ⇔ λ + 2 = 0 ή λ – 2 = 0 ⇔ λ = 2 ή λ = -2.

Στο ερώτημα αi) δείξαμε ότι για λ = 2 τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{A}}$ = 90^o μόνο για την τιμή λ = -2.

β) Για λ = -2, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = (-2, 2) , $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ = (-4 , -4) και από ερώτημα αii) τα σημεία Α(0, -1), Β(-2, 1) και Γ(-4, -5) σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{\mathrm{A}}$ = 90^o.

i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ = 0.

ii. (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right|$, αλλά

$\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2(-4)$= 16 , οπότε (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\cdot 16$ = 8.

Ή εναλλακτικά Β' τρόπος : $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|$, όμως $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$= $\sqrt{(-2)^2+2^2}$= $2\sqrt{2}$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|$= $\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}$= $4\sqrt{2}$, οπότε (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\, 2\sqrt{2}\, 4\sqrt{2}$ = 8.