ΛΥΣΗ

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$. Είναι

$$(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=\sqrt{(5-5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}-\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}=$$
$$\sqrt{\frac{81}{16}}-\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{9}{4}-\frac{41}{4}=-\frac{32}{4}=-8$$

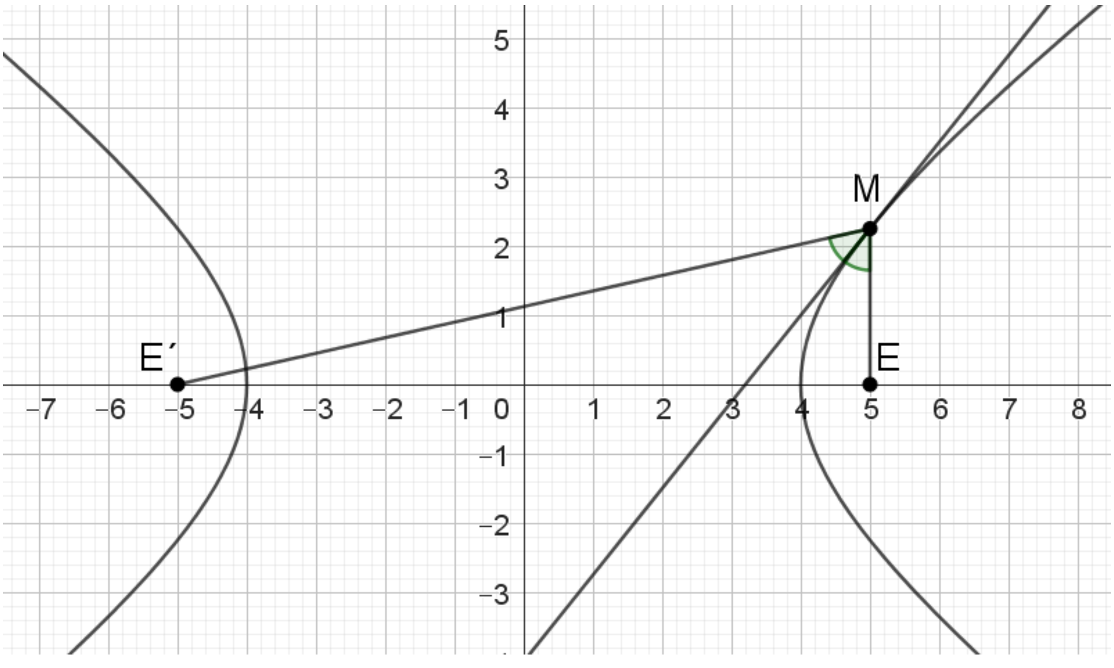
Συνεπώς $2\alpha=|-8| \Leftrightarrow \alpha=4$ οπότε έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

γ) Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$ είναι η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$ που έχει εξίσωση

$\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1$.



δ) Οι ασύμπτωτες της C έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x + 4y = 0$. Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 : (4,3)$ και $\vec{\delta}_2 : (-4,3)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{\left|\vec{\delta}_1\right| \cdot \left|\vec{\delta}_2\right|} = \frac{-4 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{-16 + 9}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-7}{25}$ οπότε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της C είναι $\frac{7}{25}$.