ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ και εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αφού οι εστίες είναι $\mathrm{E}(5,0),\mathrm{E}'(-5,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma=5$ και αφού οι κορυφές της είναι τα σημεία $\mathrm{A}(4,0),\mathrm{A}'(-4,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=4$. Επομένως από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$. Τελικά

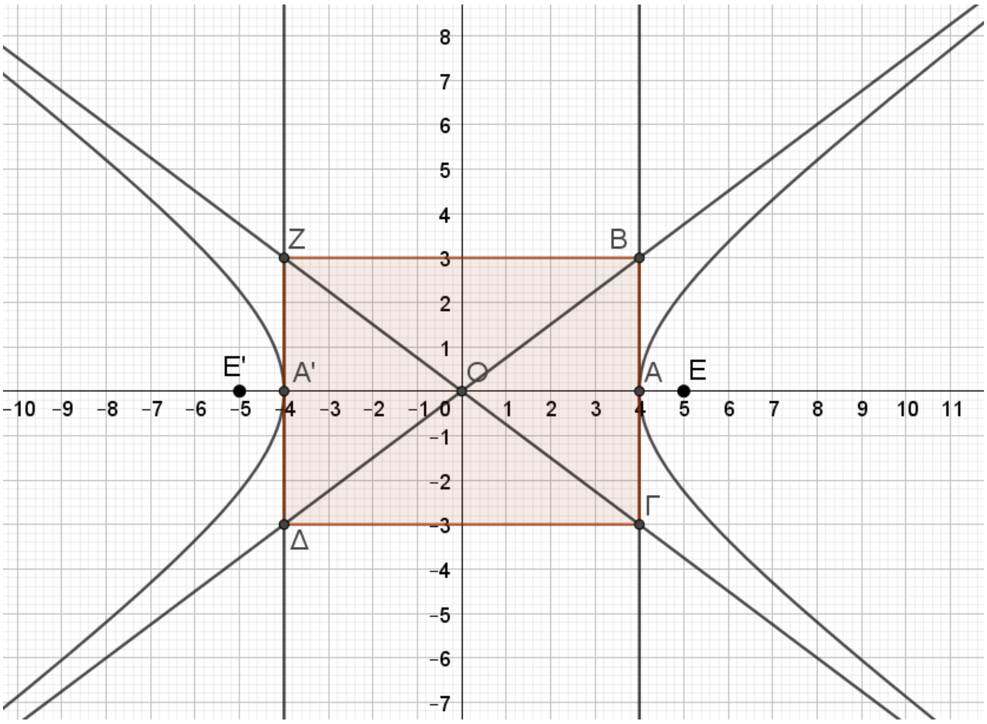
i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$

ii. η εξίσωση της υπερβολής C είναι $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

β) Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης είναι τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της C με τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$ με τις ευθείες $x=4$, $x=-4$.

Τα σημεία αυτά είναι τα $\mathrm{B}(4,3),\Gamma(4,-3),\Delta(-4,-3),\mathrm{Z}(-4,3)$, ενώ οι ασύμπτωτες της C είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης.

Η υπερβολή C, οι ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$, οπότε $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E') ή $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=-8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E).

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο της M, η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$ είναι η εφαπτομένη της στο M.Συνεπώς η ζητούμενη διχοτόμος είναι η εφαπτομένη της C στο $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $\dfrac{\sqrt{80}\cdot x}{16}-\dfrac{6y}{9}=1$.