ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η y = $\frac{\beta}{\alpha}$ x και y = - $\frac{\beta}{\alpha}$ x. Εφόσον η y = $\frac{3}{4}$ x είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή β = $\frac{3}{4}$ α. (1)

   Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

   Από (1) και (2) έχουμε ότι β = $\frac{3}{4} \cdot 4$ = 3.

   Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ =1 γίνεται $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2}$ = 1 ή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ = 1.

ii. $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+ 3^2 = \gamma^2$ ή γ^2 = 25 ή γ = 5.

   Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ = 1 στο σημείο της (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2}$ = 1 ή $\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9}$ = 1. Στο σημείο (5,$\frac{9}{4}$) θα έχουμε $\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9}$ = 1 ή $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4}$ = 1.