ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0), \mathrm{E}'(-3,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=3$. Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha$.Είναι

$$(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=\sqrt{(4-3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}+\sqrt{(4+3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}=$$
$$\sqrt{1+\frac{144}{25}}+\sqrt{49+\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{169}{25}}+\sqrt{\frac{1369}{25}}=\frac{13}{5}+\frac{37}{5}=\frac{50}{5}=10 \quad .$$

Συνεπώς $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$.

β) Από τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2=\beta^2+3^2 \Leftrightarrow \beta^2=16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=4$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(4,\frac{12}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4\cdot x}{25}+\frac{\frac{12}{5}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot x}{25}+\frac{4y}{15}=1$.