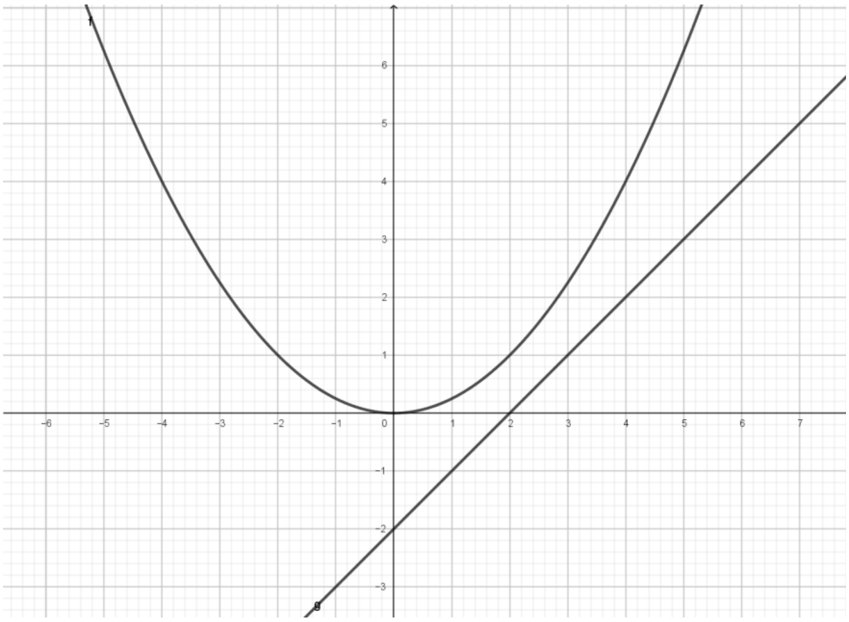
ΛΥΣΗ

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι p=2, άρα η εστία είναι το $E(0,\frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας δ: y= -1

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον Δ<0 . Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



γ)

i. Έστω σημείο M(x,y) σημείο της παραβολής , οπότε $M(x,\frac{1}{4}x^2)$. Η απόστασή του από την ευθεία ε: x-y-2=0 είναι $d(M,\varepsilon) = \frac{|x - \frac{1}{4}x^2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}x^2-x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2-x+2$ είναι $\Delta=1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = -1<0$ και άρα $\frac{1}{4}x^2-x+2>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii. $d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του Μ από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=2$

Άρα η ελάχιστη απόσταση d(M,ε) $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν x=2. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το M(2,1).