ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ έχει σταθερή τετμημένη -2 και μεταβαλλόμενη τεταγμένη οπότε κινείται στην ευθεία $(\delta): x=-2$.

Σημείωση: Επειδή το πλοίο κινείται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $\lambda>0$, οπότε τελικά το $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ κινείται στο τμήμα ευθείας $(\delta): x=-2$ που είναι πάνω από το xx'.

β) Τα σημεία $\mathrm{P}(-2,\lambda)$ και $\Pi(\kappa,\lambda)$ έχουν ίδια τεταγμένη οπότε $\Pi\mathrm{P} // xx'$ και άρα $\Pi\mathrm{P} \perp (\delta)$. Συνεπώς $(\Pi\mathrm{P}) = d(\Pi,\delta)$.

γ) Αφού κάθε χρονική στιγμή ισχύει $(\Pi\mathrm{E}) = (\Pi\mathrm{P}) \Leftrightarrow (\Pi\mathrm{E}) = d(\Pi,\delta)$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο Π κινείται στην παραβολή C με εστία το σημείο Ε(2,0) και διευθετούσα την ευθεία (δ). Η παραβολή αυτή είναι της μορφής $y^2=2px$ με $\frac{p}{2}=2 \Leftrightarrow p=4$. Τελικά $C: y^2=8x$.

γ) Η ευθεία EP έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\mathrm{EP}} = \frac{0-\lambda}{2+2} = -\frac{\lambda}{4}$ οπότε η μεσοκάθετός της (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ_ε και ισχύει $\lambda_{\mathrm{EP}} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{4}{\lambda}$ (αφού $\lambda>0$). Το μέσο του EP είναι το $(\frac{-2+2}{2}, \frac{\lambda+0}{2})$ δηλαδή το $(0,\frac{\lambda}{2})$.

Έτσι $(\varepsilon): y-\frac{\lambda}{2} = \frac{4}{\lambda}\cdot x \Leftrightarrow y = \frac{4}{\lambda}\cdot x + \frac{\lambda}{2}$.

Η (ε) εφάπτεται της C αν και μόνο αν το σύστημά τους καταλήγει σε εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα 0. Πράγματι, με αντικατάσταση της $y=\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}$ στην εξίσωση $y^2=8x$, έχουμε:

$$\left(\frac{4}{\lambda}\cdot x+\frac{\lambda}{2}\right)^2=8x \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{\lambda^2}x^2+4x+\frac{\lambda^2}{4}=8x \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{\lambda^2}x^2-4x+\frac{\lambda^2}{4}=0$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot\frac{16}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{4}=16-16=0$.

Το σημείο επαφής θα έχει τετμημένη $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-4}{2\cdot\frac{16}{\lambda^2}}=\frac{\lambda^2}{8}$ και τεταγμένη

$y^2=8\cdot\frac{\lambda^2}{8}=\lambda^2$ και επειδή $\lambda>0$ έχουμε ότι $y=\lambda$. Συνεπώς το σημείο επαφής είναι το σημείο Π.

Σημείωση: Το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) ισχύει για οποιαδήποτε παραβολή.