ΛΥΣΗ 2

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ και } y_k = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \,.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{4-0}{1-3} = -2$, κατά συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ είναι $y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$ είναι το σημείο $K(2,2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho = (AK) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές B, Δ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος $A\Gamma$ και του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$.

Λύνουμε το σύστημα :

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$ (1)

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ (2)

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$$(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2 + (x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \text{ ή } x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 0 \,.$$

Για $x = 4$ βρίσκουμε $y = 3$ και για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4,3)$ και $(0,1)$.