ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-6$, $B=-8$, $\Gamma=21$ και $A^2+B^2-4\Gamma=36+64-84=16>0$.

Επομένως, το κέντρο Κ του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(3,4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=2$, $B=-2$, $\Gamma=1$ και $A^2+B^2-4\Gamma=4+4-4=4>0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$\Lambda\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(\text{-}1,1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(K\Lambda)=\sqrt{(x_\Lambda-x_K)^2+\left(y_\Lambda-y_K\right)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

Επίσης, $R+\rho=3$.

Αφού $(K\Lambda)>R+\rho$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

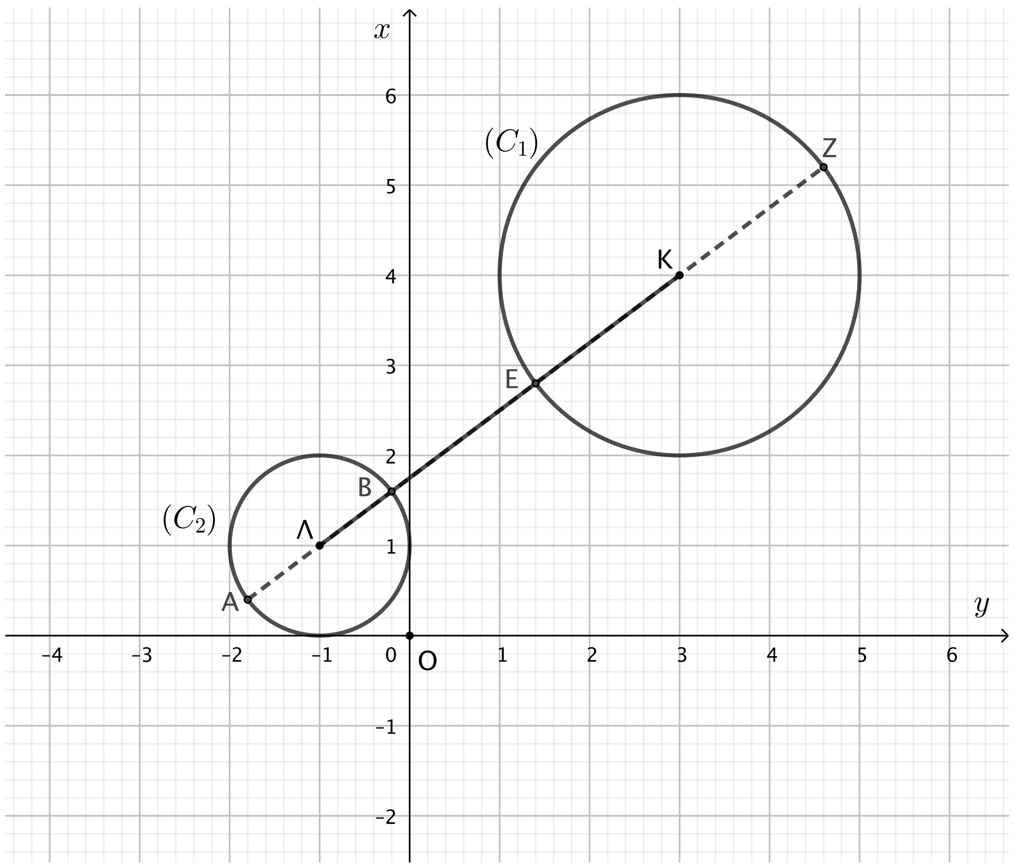
γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(BE)=(K\Lambda)-(EK)-(\Lambda B)=(K\Lambda)-R-\rho=5-2-1=2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(AZ)=(K\Lambda)+(A\Lambda)+(KZ)=(K\Lambda)+R+\rho=5+2+1=8$$



x
y
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
O
1
2
3
4
5
6
(C1)
(C2)
Z
K
E
B
Λ
A