ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + λx + λy + λ - 1 = 0$ (1), $λ\in \mathbb{R}$, για την οποία:

$A = λ$, $B = λ$ και $Γ = λ – 1$, οπότε $A^2 + B^2 – 4Γ = λ^2 + λ^2 -4(λ – 1) = 2 λ^2 – 4λ + 4 =$

$2(λ^2 - 2λ + 2) > 0$ για κάθε $λ\in \mathbb{R}$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $λ\in \mathbb{R}$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $λ\in \mathbb{R}$

είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{λ}{2}, -\frac{λ}{2})$ και η

$ρ = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ} = \frac{1}{2}\sqrt{2(λ^2 - 2λ + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, ε) = ρ$ (2).

Είναι: $d(K, ε) = \frac{|-\frac{λ}{2}-\frac{λ}{2}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-λ+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2-λ|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-λ|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{λ^2 - 2λ + 2} \Leftrightarrow |2 - λ| = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - λ|^2 = \sqrt{λ^2 - 2λ + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 – λ)^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow 4 -4λ + λ^2 = λ^2 - 2λ + 2 \Leftrightarrow$

$2λ = 2 \Leftrightarrow λ = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $λ = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $λ = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $ρ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y – y_M = κ(x – x_M)$ με $κ\in \mathbb{R}$ ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = κ(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2κx - 2y + 3κ – 1 = 0$ με $κ\in \mathbb{R}$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C $\Leftrightarrow d(K, ζ) = ρ \Leftrightarrow d(K, ζ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως d(K, ζ) = $\frac{|2\kappa(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3\kappa-1|}{\sqrt{(2\kappa)^2+(-2)^2}}$ = $\frac{|-\kappa+1+3\kappa-1|}{\sqrt{2}}$ = $\frac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2+4}}$ = $\frac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2+1}}$ =

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+1}$ = $\frac{1}{2}$ ⇔ $2\kappa^2 = \kappa^2 + 1$⇔ $\kappa^2 = 1$⇔ $\kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για κ = 1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_1: 2x – 2y +2 = 0 ή ζ_1: x – y +1 = 0.

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: -2x – 2y - 4 = 0

ή ζ_2: x + y +2 = 0. Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο M. Παρατηρούμε ότι η ζ_2 είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο M ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).