ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα της διαμέσου $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2} = \dfrac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2} =$

$= \dfrac{(\lambda+3\lambda,\lambda+1+\lambda-1)}{2} = \dfrac{(4\lambda,2\lambda)}{2} = (2\lambda,\lambda)$.

β)

i. Αφού $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ θα είναι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$ ή $\left(\lambda,\lambda+1\right)\cdot\left(3\lambda,\lambda-1\right) = 0$

ή $3\lambda^2 + (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ ή $3\lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0$ ή $4\lambda^2 = 1$ ή $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(x,y) της διαμέτρου ΒΓ.

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda,\lambda) = \left(2\cdot\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $A\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overrightarrow{AM} = \left(x_M - x_A, y_M - y_A\right)$ ή $\left(1,\dfrac{1}{2}\right) = \left(x_M - 2, y_M - \dfrac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases} x_M - 2 = 1 \\ y_M - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

ή $\begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \end{cases}$. Επομένως το κέντρο Μ είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση (ΑΜ)=$\sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2} =$

$\sqrt{\left(3-2\right)^2 + \left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\left(x_o, y_o\right)$ και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $\left(x - x_o\right)^2 + \left(y - y_o\right)^2 = \rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$\left(x-3\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ή $\left(x-3\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.