ΛΥΣΗ

α) $\vec{AM} = \left(x_M - x_A, y_M - y_A\right) = \left(x-(-1), y-0\right) = \left(x+1, y\right)$. $\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\vec{BM} = \left(x_M - x_B, y_M - y_B\right) = \left(x-1, y-0\right) = \left(x-1, y\right)$. $\left|\vec{BM}\right| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(1-(-1)\right)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2 + 0} = 2$.

$\vec{AM}^{\,2} + \vec{BM}^{\,2} = 9\left|\vec{AB}\right|$, άρα $\left|\vec{AM}\right|^2 + \left|\vec{BM}\right|^2 = 9 \cdot 2$ ή $\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 = 18$ ή

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 18$ ή $2x^2 + 2y^2 + 2 = 18$ ή $x^2 + y^2 = 8$

β)

i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2 = 32$

   δηλαδή ΓΔ = $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

   Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι ρ = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το Ο(0,0).

   Παρατηρούμε ότι ΓΔ = 2ρ, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\Gamma\widehat{M}\Delta = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.