ΛΥΣΗ

α) Για το σημείο A είναι: $\mathrm{x} = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\mathrm{y} = \eta\mu\theta$, οπότε $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$. Άρα, το A ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\mathrm{R} = 1$.

Για το σημείο B είναι: $\mathrm{x} = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta$ και $\mathrm{y} = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε

$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 =$

$= [\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta] + [\eta\mu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta] =$

$= 2[\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta] = 2 \cdot 1 = 2$.

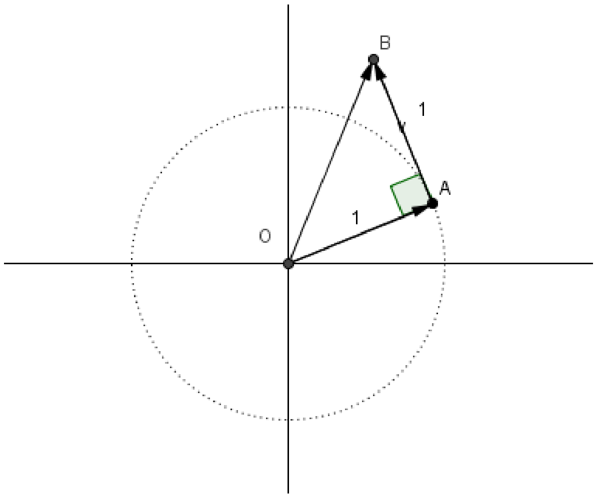
Άρα, το B ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\mathrm{R} = \sqrt{2}$.

β) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) - (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.

Οπότε, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.

Άρα, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



γ) Από το β) ερώτημα, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο (με την ορθή γωνία στην κορυφή A). Επιπλέον, από το β) ερώτημα, αφού $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, έχουμε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$. Επομένως, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα όλες οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45^{o}. Επομένως, $\omega = 45^{\mathrm{o}}$.