ΛΥΣΗ

α. Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

Επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β. Υπολογίσουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε). Είναι:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1+4+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$$

οπότε η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

γ. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$, οπότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες που είναι κάθετες σ' αυτήν έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$, είναι δηλαδή της μορφής $y = -2x + \beta$. Η εξίσωση αυτή γράφεται $2x + y - \beta = 0$ και η ευθεία που παριστάνει απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του.

Έτσι, έχουμε:

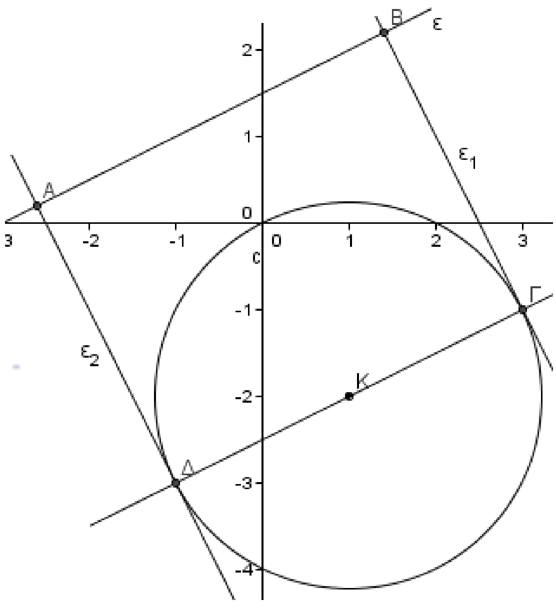
$$\frac{|2 \cdot 1 - 2 - \beta|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = \pm 5$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι

$$\varepsilon_1 : y = -2x + 5 \text{ και } \varepsilon_2 : y = -2x - 5$$

δ. Ένα σημείο πάνω στην ευθεία ε_1 είναι το $M(0, 5)$ και ισχύει:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_2) = \frac{|0+5+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2\rho$$



Γεωμετρικά, αν από το κέντρο Κ του κύκλου φέρουμε τις ακτίνες ΚΓ και ΚΔ τότε αυτές είναι παράλληλες στην ευθεία ε . Αλλά από το Κ διέρχεται μια μόνο παράλληλη στην ε, οπότε τα σημεία Γ, Κ, Δ είναι συνευθειακά και συνεπώς τα Γ, Δ είναι αντιδιαμετρικά οπότε $(\Gamma\Delta) = 2\rho$.