ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο Μ είναι: $xx_1 + yy_1 = 4$.

- Αν $y = 0$, τότε έχουμε $x = \frac{4}{x_1}$, οπότε $K\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$.
- Αν $x = 0$, τότε έχουμε $y = \frac{4}{y_1}$ (προφανώς $y_1 \neq 0$), οπότε $\Lambda\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$.

β) Το μήκος του τμήματος ΚΛ, δεδομένου ότι $x_1^2 + y_1^2 = 4$, είναι:

$$d = \sqrt{\frac{16}{x_1^2} + \frac{16}{y_1^2}} = 4\sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2}} = 4\sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 y_1^2}} = 4\frac{\sqrt{4}}{x_1 y_1} = \frac{8}{x_1 y_1}$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Όταν $x_1 = \sqrt{2}$, τότε από την ισότητα $x_1^2 + y_1^2 = 4$ με $y_1 > 0$ έχουμε :

$$y_1^2 = 4 - x_1^2 \Leftrightarrow y_1^2 = 4 - 2 \Leftrightarrow y_1^2 = 2 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{2}$$

οπότε $d_o = \frac{8}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{8}{2} = 4$.

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{8}{x_1 y_1} \geq 4$, ή αρκεί, $\frac{4}{x_1 y_1} \geq 2$, για την απόδειξη της οποίας αρκεί να δείξουμε ότι $x_1^2 + y_1^2 \geq 2x_1 y_1$, που ισχύει, αφού προκύπτει άμεσα από την προφανή ανισότητα $(x_1 - y_1)^2 \geq 0$.