ΛΥΣΗ

α) i. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A=-9$, $B=-3$, $\Gamma=10$ και $A^2+B^2-4\Gamma=81+9-40=50>0$.

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$$

και η ακτίνα του

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

<u>Εναλλακτική λύση (με συμπλήρωση τετραγώνου)</u>

Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2+y^2-9x-3y+10=0$$

$$\left[x^2-2\cdot\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{2}\right)^2\right]+\left[y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-10$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}+\frac{9}{4}-\frac{40}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ii. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K,\varepsilon)=\frac{\left|4\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{3}{2}-10\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{25}{2}\right|}{5}=\frac{5}{2}<\frac{5\sqrt{2}}{2}=R$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία A και B.

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$3y=10-4x\Leftrightarrow y=\frac{10-4x}{3}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+\left(\frac{10-4x}{3}\right)^2-9x-3\left(\frac{10-4x}{3}\right)+10=0$$

$$x^2+\frac{(10-4x)^2}{9}-9x-(10-4x)+10=0$$

$$x^2+\frac{(10-4x)^2}{9}-9x+4x=0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 5x = 0$$

$$9x^2 + \left(100 - 80x + 16x^2\right) - 45x = 0$$

$$25x^2 - 125x + 100 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (3)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι $x = 1$, $x = 4$.

Για $x = 1$ είναι $y = 2$.

Για $x = 4$ είναι $y = -2$.

Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$.

β) i. Είναι:

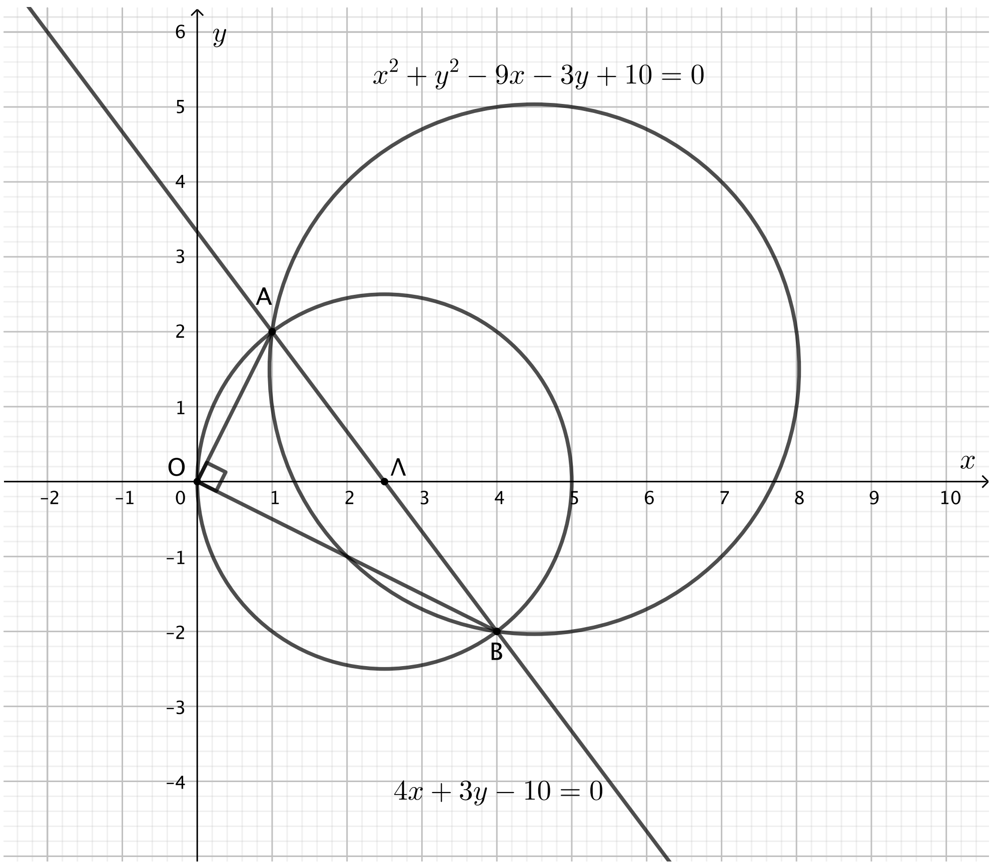
$$\overrightarrow{OA} = \left(x_A - x_O, y_A - y_O\right) = (1,2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \left(x_B - x_O, y_B - y_O\right) = (4,-2)$$

Οπότε:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 0$$

ii.



Αφού είναι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, η γωνία $A\widehat{O}B$ θα είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.