ΛΥΣΗ

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την AB, είναι το μέσο της M, επομένως

$$M\left(\frac{\alpha+0}{2},\frac{\beta+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$\rho=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0-\alpha)^2+(\beta-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

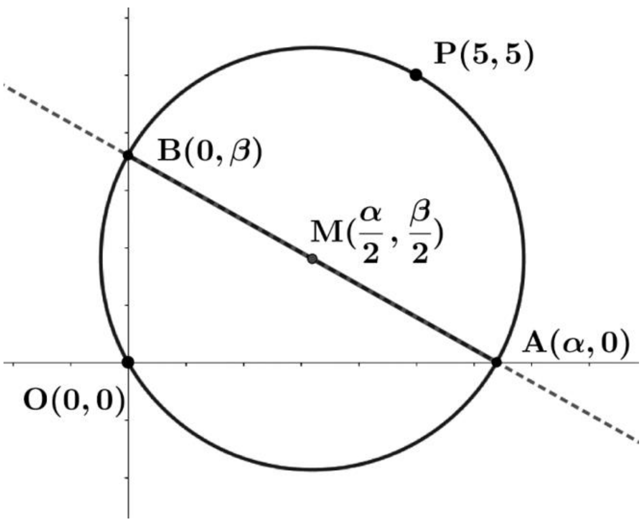
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+y^2-2y\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y+\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}=\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}\Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0. \quad (1)$$

Είναι όμως $\alpha+\beta=10$, τότε $\beta=10-\alpha$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0.$$



β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2+y^2-x-9y=0$. (1)

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2+y^2-9x-y=0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x-8y=0\Rightarrow x=y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία O (0,0) και P(5,5).

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο P(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$.
Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 5$ και $y = 5$ έχουμε:

$$0^2 + 0^2 - \alpha \cdot 0 - (10 - \alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 .$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο M(x, y) είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha = 2x \\ \beta = 2y \\ \alpha + \beta = 10,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5 . \ (\varepsilon)$$

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή α, β > 0 έχουμε:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$\beta > 0 \Leftrightarrow y > 0 .$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, που ορίζεται από την ευθεία $x + y = 5$ με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του A(5,0) και B(0,5).