ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

με $A = -4\alpha$, $B = -4\alpha$ και $\Gamma = 0$.

Για να παριστάνει κύκλο θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\alpha^2 + 16\alpha^2 = 32\alpha^2$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\alpha^2 > 0$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$.

β) Τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για $\alpha \neq 0$, είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2\alpha, 2\alpha)$$

και η ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}|\alpha|}{2} = 2\sqrt{2}|\alpha|$$

γ) Για τα κέντρα των κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα x΄x, θα πρέπει να ισχύει:

$$|y_K| = R$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$|2\alpha| = 2\sqrt{2}|\alpha| \quad ή \quad |\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \quad ή \quad |\alpha|(1 - \sqrt{2}) = 0 \quad ή \quad \alpha = 0$$

Όμως, $\alpha \neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα x΄x.