ΛΥΣΗ

α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, δηλαδή το $M(2,0)$. Επιπλέον, το ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x. Επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η κατακόρυφη ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο M και έχει εξίσωση $x = 2$.

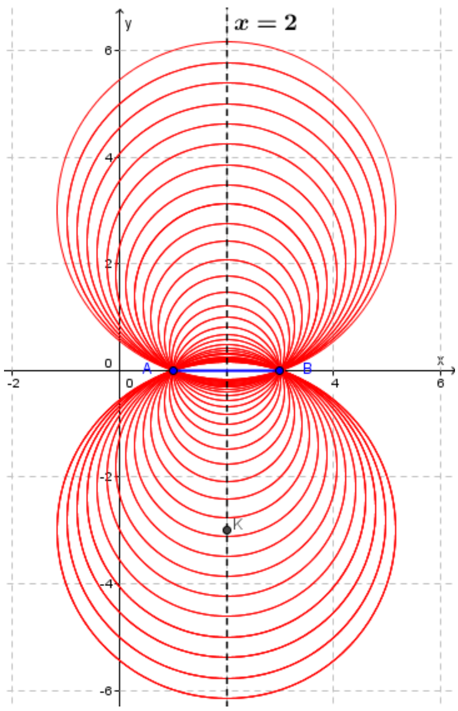
β) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Αφού το σημείο K ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$, τότε θα είναι της μορφής $K(2, \lambda)$, με $\lambda \epsilon \mathbb{R}$. Το κέντρο των κύκλων λοιπόν είναι το σημείο $K(2, \lambda)$.

Αφού οι κύκλοι διέρχονται από τα σημεία A και B, τότε η ακτίνα τους είναι:

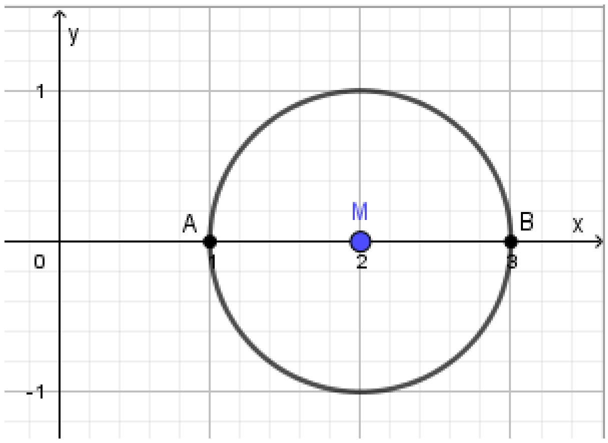
$$\rho = (KB) = (KA) = \sqrt{(2-1)^2 + (\lambda - 0)^2} = \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

Επομένως, η εξίσωσή τους είναι η $(x-2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).



γ)

i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το μέσον $M(2,0)$ της διαμέτρου AB, επομένως το $\lambda = 0$. Έτσι η εξίσωσή του είναι η $(x-2)^2 + y^2 = 1$.



ii. Το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και σε όλους τους κύκλους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $d(K,\varepsilon) = \rho$. Πραγματικά είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1 \cdot 2 + \lambda \cdot \lambda - 1|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{|1+\lambda^2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{(1+\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} = \sqrt{1+\lambda^2}$$