ΛΥΣΗ

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $(MM_1) = 4$. Η διαγώνιος OM είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου.

Έχουμε $(OM) = \sqrt{(OM_1)^2 + (MM_1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, δηλαδή $\rho = 2\sqrt{2}$

Το μέσον της OM έχει συντεταγμένες $K(2,2)$.

Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος) έχει εξίσωση C: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

β) Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Έχουμε:

$d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho$.

Άρα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

γ) Έστω $N(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και του κύκλου.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 8 \\ (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

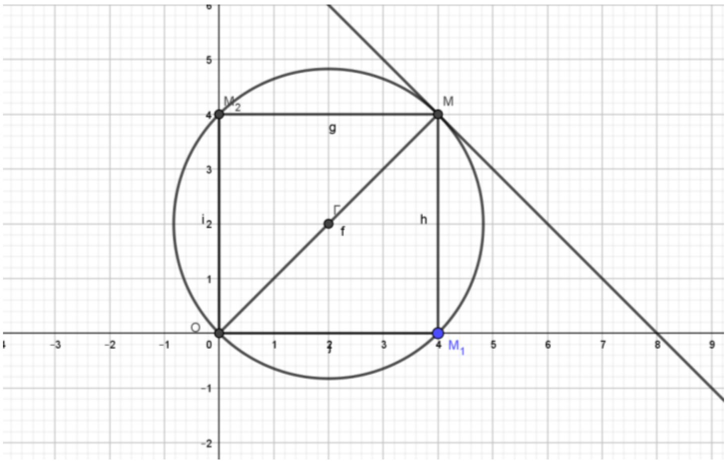
$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (8 - y_1 - 2)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (6 - y_1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 36 - 12y_1 + {y_1}^2 + {y_1}^2 - 4y_1 + 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 2{y_1}^2 - 16y_1 + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ {y_1}^2 - 8y_1 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (y_1 - 4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(4,4)$.


M
M_2
M_1
O
Γ
g
h
f
i_2