ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 – (λ + 8)x + λy + 7 = 0$ (1), με $λ \in R$, για την οποία:

$A = -(λ+8)$, $B = λ$ και $Γ = 7$, οπότε $A^2 + B^2 – 4Γ = [-(λ+8)]^2 + λ^2 -4\cdot 7 =(λ+8)^2 + λ^2 – 28 =$

$λ^2 + 16λ + 64 + λ^2 – 28 = 2λ^2 + 16λ + 36 = 2(λ^2 + 8λ + 18) > 0$, για κάθε $λ \in R$,

εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $Δ = -8 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $λ \in R$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) είναι το

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-(λ+8)}{2}, -\frac{λ}{2}\right) = \left(\frac{λ+8}{2}, -\frac{λ}{2}\right)$, $λ \in R$ και ακτίνα η

$ρ = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ} = \frac{1}{2}\sqrt{2(λ^2 + 8λ + 18)}$, $λ \in R$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι

τα $K\left(\frac{λ+8}{2}, -\frac{λ}{2}\right)$, $λ \in R$. Αν $K(x, y)$, τότε:

$$\begin{cases} x = \frac{λ+8}{2} \\ y = -\frac{λ}{2} \\ λ \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y+8}{2} \\ λ = -2y \\ λ \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ λ = -2y \\ λ \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ λ = -2y \\ λ \in R \end{cases}$$

. Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x + y - 4 = 0$.

γ) Η εξίσωση (1) για κάθε $λ \in \Re$ γράφεται:

$x^2 + y^2 – λ x - 8x + λy + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 8x +7) + λ(y – x) = 0$, οπότε:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

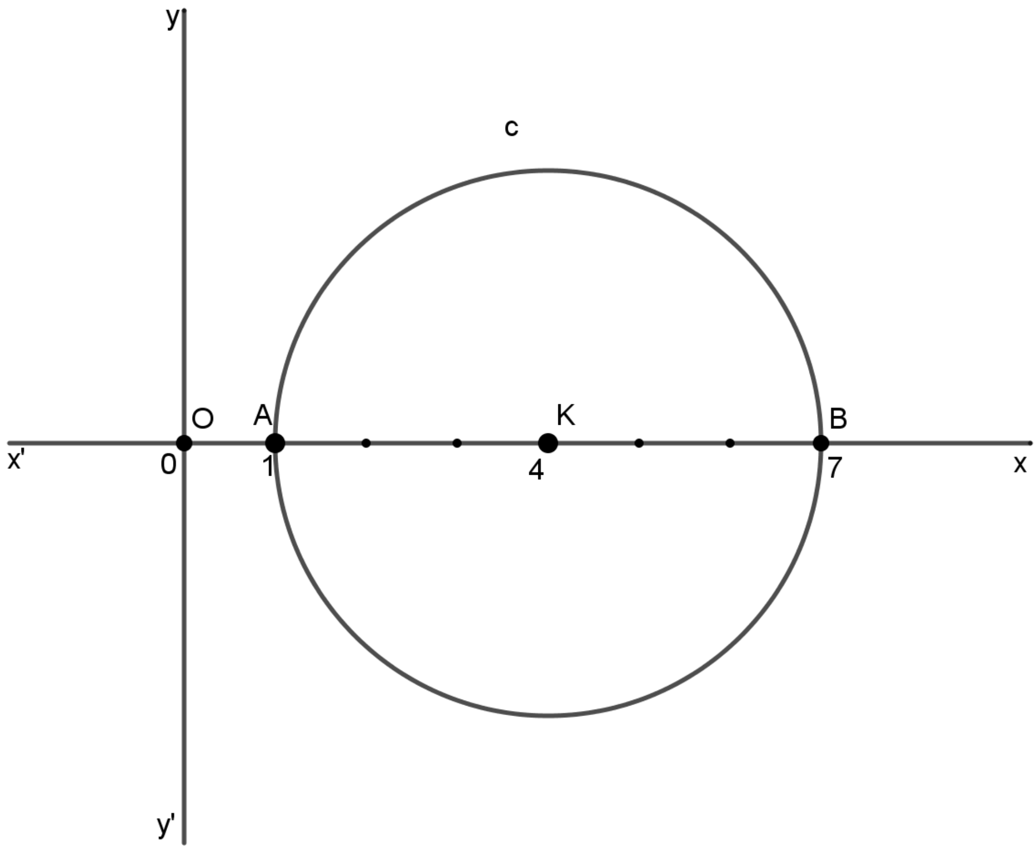
$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

, άρα $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Επομένως για κάθε $λ \in \Re$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $N\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), για $λ = 0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $ρ = 3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.


y
c
O
A
K
B
x'
0
1
4
7
x
y'