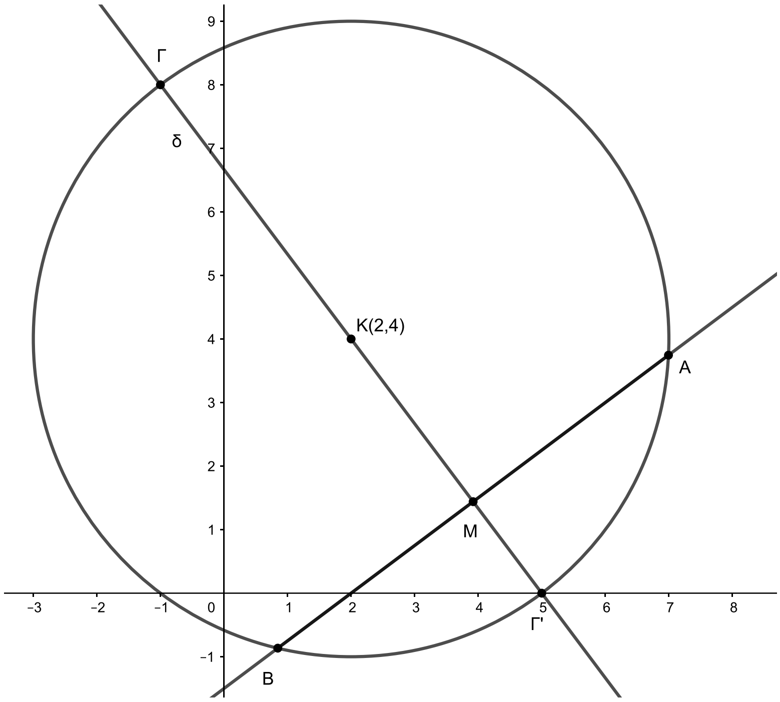
ΛΥΣΗ



α) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 8y + 16 - 16 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(2,4) και η ακτίνα του είναι ρ=5.

β)

i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 2 - 4\cdot 4 - \mu|}{\sqrt{3^2+4^2}} < 5 \Leftrightarrow \frac{|-10-\mu|}{5} < 5 \Leftrightarrow |\mu+10| < 25 \Leftrightarrow -25<\mu+10<25 \Leftrightarrow -35<\mu<15$.

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου Κ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot 2-4\cdot 4 = \mu \Leftrightarrow \mu = -10$. Η τιμή $\mu = -10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα (-35,15) που βρήκαμε στο β)i. ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ. Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$. Επειδή $\delta \perp \varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{4}{3}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι: $y - y_K = -\frac{4}{3}(x - x_K)$ ή $y-4 = -\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 3y-12 = -4x+8$

$\Leftrightarrow$ 4x+3y=20. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases} x^2+y^2-4x-8y-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{9}(20-4x)^2-4x-8\frac{1}{3}(20-4x)-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2+400+16x^2-160x-36x-480+96x-45=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 25x^2-100x-125=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ ή } x=-1 \\ y=0 \text{ ή } y=8 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ΄(-1,8).