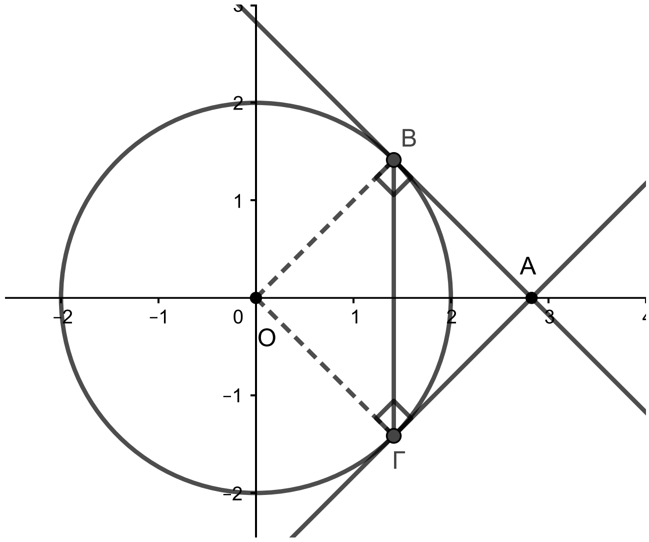
ΛΥΣΗ



α)

i. Το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Ox με $(OA)= 2\sqrt{2} >2$ με 2 η ακτίνα του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x= 2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon) =2\sqrt{2}$
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in R$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$

  Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του O ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή $d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow$

  $2\sqrt{2}\ |\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4 =0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

  Για $\lambda=1$, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για $\lambda= - 1$, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$

  Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και -1 αντίστοιχα και $\lambda_1\cdot\lambda_2= -1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο A είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Συνεπώς (ΑΒΟΓ) = 2^2 = 4 τ.μ.