ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2-1, 4-2) = (1,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-1, 1-2) = (2,-1)$.

Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα και ως εκ τούτου $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

Εναλλακτική λύση: $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

β) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A, ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ έχει διάμετρο την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου και κέντρο το μέσο K της $B\Gamma$.

Αλλά $x_K = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_K = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, οπότε $K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Για την ακτίνα του, είναι: $\rho = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ως γνωστόν, η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου c είναι η $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

γ) Έστω $\varepsilon: y = \lambda\, x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα του ρ. Είναι λοιπόν:

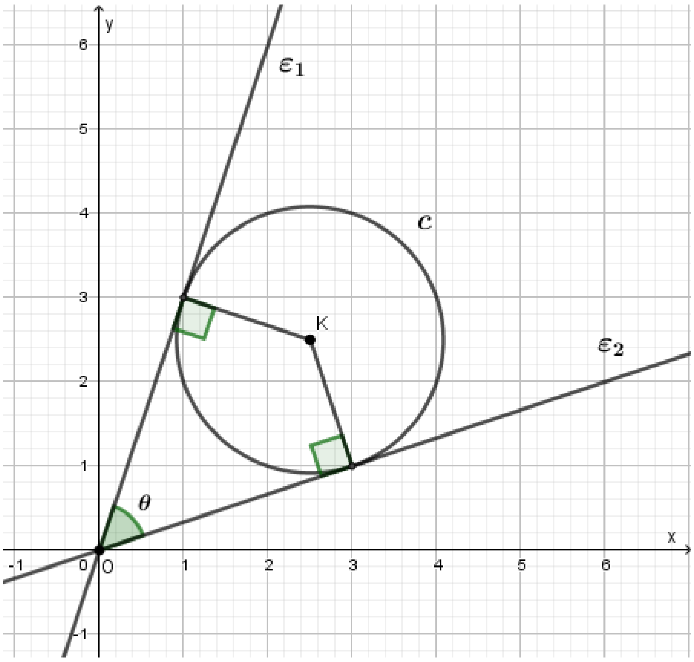
$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2} + 0\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot |\lambda - 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$25\,(\lambda-1)^2 = 10\,(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0$ και οι λύσεις της δευτέρου βαθμού εξίσωσης που έχει προκύψει είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$ ή $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Επειδή από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτόν, οι ζητούμενες ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = 3x \ \text{ και } \ \varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x$$



y
x
ε_1
ε_2
c
K
θ
O