ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$
$x^2-2\cdot3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2+(y-2)^2=5 (1)$.

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β)

i. Η (1) για $x=4$ και $y=4$ δίνει $(4-3)^2+(4-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει. Επίσης η

(1) για $x=2$ και $y=0$ δίνει $(2-3)^2+(0-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει.

Συνεπώς τα σημεία Α και Β είναι πάνω στον κύκλο. Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο Κ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Πράγματι $x_K=\frac{x_A+x_B}{2} \Leftrightarrow 3=\frac{4+2}{2} \Leftrightarrow 3=3$ ισχύει και $y_K=\frac{y_A+y_B}{2} \Leftrightarrow 2=\frac{4+0}{2} \Leftrightarrow 2=2$ ισχύει.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέτρου ΑΒ είναι $\lambda=\frac{0-4}{2-4}=2$.

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Έστω ε: $y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$ η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου .

Για να εφάπτεται στον κύκλο αρκεί $d(K,\varepsilon)=\rho \Rightarrow \frac{|2\cdot3-2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |\beta+4|=5$, οπότε

β + 4 = 5 ή β + 4 = -5 δηλαδή β = 1 ή β = - 9. Επομένως οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ έχουν εξισώσεις ε_1: y = 2x + 1 και ε_2: y = 2x - 9.

γ) Ισχύει $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά δηλαδή η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Άρα αντικαθιστώντας στην εξίσωση της (η) τις συντεταγμένες του κέντρου $x=3$ και $y=2$ έχουμε : $2=3\lambda+4 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$.