ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overrightarrow{AB}=(4,\,0) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma}=(2,\,2)$$

και επειδή $\det(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$, τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,\,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της ΒΓ διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως, η εξίσωσης της ευθείας (ε) είναι $y-3=x-2$ δηλαδή $y=x+1$.

γ) Έστω $K(x,\,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Με $y=x+1$, έχουμε:

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2\Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9\Leftrightarrow 8x=8\Leftrightarrow x=1$$

οπότε $y=2$. Άρα, $K(1,\,2)$.

δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει

$$\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

Επομένως, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.