ΛΥΣΗ

α)

i. $\overrightarrow{AM}=\left(x-1,\psi-1\right)$
$\overrightarrow{BM}=\left(x-5,\psi-5\right)$.

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}^{\,2}+\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}^{\,2}=32$$

$$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0$ διαιρούμε με 2 και έχουμε

$x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0$ (1)

ii. Για να παριστάνει η εξίσωση $x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0$ κύκλο θα πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Από την (1) έχουμε Α = - 6, Β = - 6, Γ = 10.

$A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot10=32>0$. Επομένως πρόκειται περί κύκλου.

β)

i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία , πρέπει η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

d(K,ε) = ρ δηλαδή $\dfrac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow\left(3\lambda+1\right)^2=8\left(\lambda^2+1\right)$.

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8\Rightarrow\lambda^2+6\lambda-7=0$.

Υπολογίζουμε τις ρίζες και έχουμε λ = -7 και λ = 1.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ΑΒ είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\sigma\upsilon\nu45^\circ \text{ ή } \frac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2} \text{ ή } 2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2} \text{ ή } 1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2} \text{ ή } (1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$$

$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2$ ή λ =0.