ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho>0$.

Η (1) γράφεται $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2,\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:

Για $\lambda=0$, $\quad x^2+y^2-4x+3=0$

Για $\lambda=1$, $\quad x^2+y^2-4x-2y+3=0$.

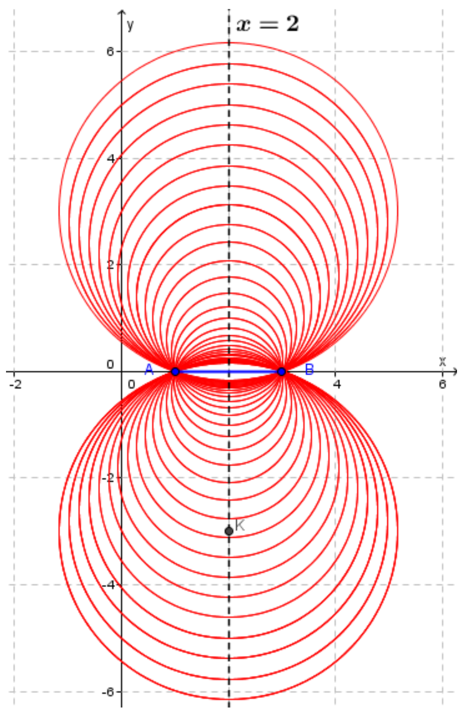
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει $y=0$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Επομένως έχει εξίσωση $y=0$.

Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=2$. Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.



δ) Αφού το σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 0$.