ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$.

Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$, άρα η $\mathrm{K}\Lambda$ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y-1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x$, δηλαδή η διάκεντρος βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{\mathrm{O}}y$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2\Leftrightarrow$ $3(2x-5)=-3(2y-5)\Leftrightarrow 2x-5=5-2y\Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$, βρίσκουμε $(x-1)^2+(4-x)^2=9\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x_1=1,x_2=4$ με τις αντίστοιχες τιμές $y_1=4,y_2=1$. Τελικά τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $\mathrm{B}(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

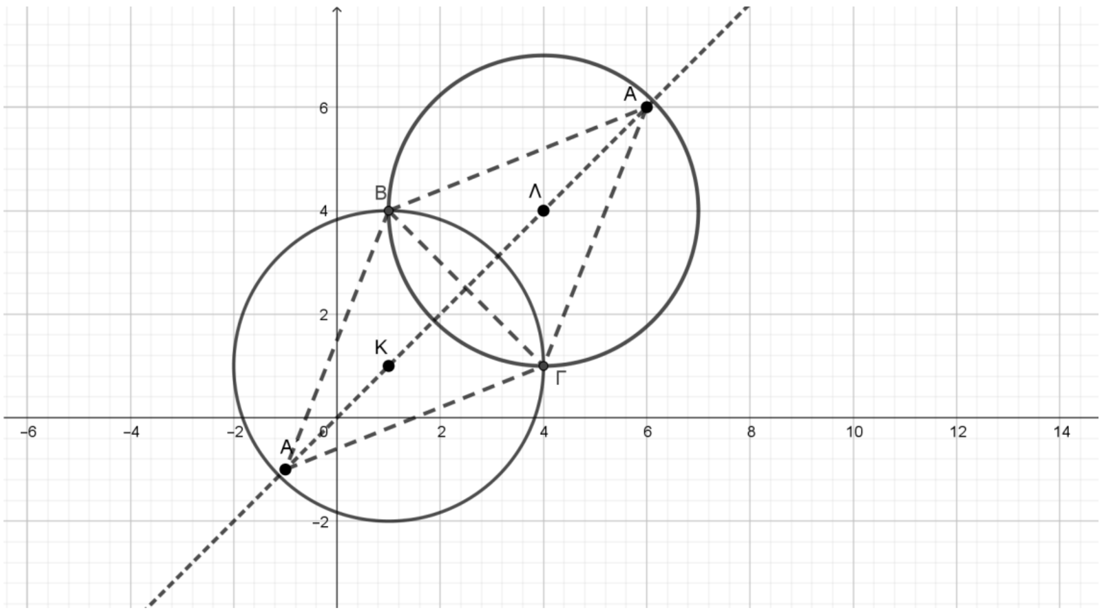
γ) Το σημείο $\mathrm{A}(x,y)$ ανήκει στην ευθεία που ανήκουν τα σημεία Κ και Λ με εξίσωση, όπως βρήκαμε στο α) ερώτημα, $y=x$ αν αι μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση. Οπότε έχουμε $\mathrm{A}(x,x)$.

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-x,4-x)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(4-x,1-x)$.

Ακόμα $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|(1-x)^2-(4-x)^2\right|=\dfrac{1}{2}|6x-15|$.

Οπότε $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}|6x-15|=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow|6x-15|=21\Leftrightarrow\begin{cases}6x-15=21\\6x-15=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\x=-1\end{cases}$.

Τελικά βρήκαμε δύο σημεία της ευθείας $y=x$, τα $\mathrm{A}(6,6)$ και $\mathrm{A}'(-1,-1)$, που σχηματίζουν με τα σημεία τομής B και Γ τρίγωνο εμβαδού $\dfrac{21}{2}\tau.\mu.$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



A
B
Λ
K
Γ
Δ
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
6
4
2
-2