ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, για να παριστάνει κύκλο μόνο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, όπου $A=-4\kappa, B=-2\kappa$ και $\Gamma=4$.

Άρα $A^2+B^2-4\Gamma=16\kappa^2+4\kappa^2-16=20\kappa^2-16$ και

$$20\kappa^2-16>0 \Leftrightarrow \kappa^2>\frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa|>\frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa>\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

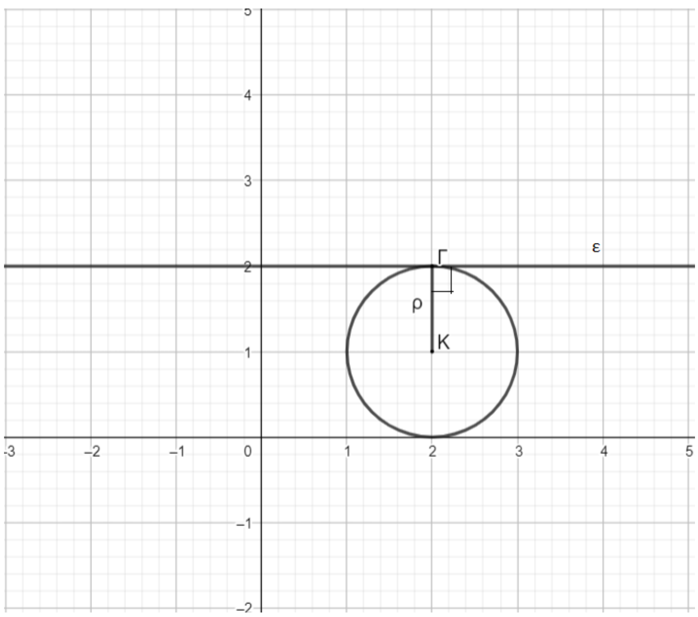
β) Η εξίσωση (1) είναι μία παραμετρική εξίσωση με παράμετρο κ και $\kappa \in \left(-\infty,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$.

Για κάθε $\kappa \in \left(-\infty,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$ έχουμε έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa,\kappa)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{20\kappa^2-16}}{2}$.

γ) Τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) παραμετρική εξίσωση, από το ερώτημα β) έχουν συντεταγμένες $(2\kappa,\kappa)$, δηλαδή $x=2\kappa$ και $y=\kappa$.

Άρα $x=2y \Leftrightarrow x-2y=0$ (2), δηλαδή τα κέντρα ανήκουν στην εξίσωση ευθείας (2).

δ) Για $\kappa=1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2+y^2-4x-2y+4=0$, με κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τον παραπάνω κύκλο.

Η ευθεία που είναι εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο Γ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο τμήμα $\mathrm{K\Gamma} = \rho$ και παράλληλη στον άξονα x΄x, γιατί Κ και Γ έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα έχει εξίσωση $y = 2$.