ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$. Ακόμα $\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή $(\mathrm{K}\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β)

i. Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda} = \dfrac{-2-3}{7-2} = -1$, οπότε $\mathrm{K}\Lambda : y - 3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1.

Έχουμε:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \pm 2 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 0 \\ y = 1 \text{ ή } y = 5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}'(0,5)$.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 + (-x+7)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 = 9 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = \pm 3 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 10 \\ y = 1 \text{ ή } y = -5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_2 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}''(10,-5)$. Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $\mathrm{A}(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

Εναλλακτική λύση:

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K\Lambda}$ με τον κύκλο C_1 λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}$ και βρίσκουμε, όπως και στον προηγούμενο τρόπο λύσης, τα σημεία $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}'(0,5)$.

Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=(7-2,-2-3)=(5,-5)$ και $\overrightarrow{\mathrm{KA}}=(4-2,1-3)=(2,-2)$, δηλαδή

$$\overrightarrow{\mathrm{KA}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}},$$

οπότε το A, ως εσωτερικό σημείο του $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$, είναι το μοναδικό ζητούμενο σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{K\Lambda}$ και διέρχεται από το σημείο επαφής $\mathrm{A}(4,1)$.

Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{\mathrm{K\Lambda}}=-1$, οπότε $\lambda_\eta\cdot\lambda_{\mathrm{K\Lambda}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta=1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση:

$$(\eta): y-1=1(x-4)\Leftrightarrow y=x-3.$$