ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση: (2λ+1)x – (λ – 2)y + λ – 7 = 0 (Ε), $\lambda \in \mathbb{R}$ που είναι της μορφής Αx + Βy + Γ = 0, με Α = 2λ +1 και Β = λ – 2.

Οπότε: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι Α ≠ 0 ή Β ≠ 0, επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: 2λx + x - λy + 2y + λ – 7 = 0 ή

(2x – y + 1)λ + (x + 2y – 7) = 0. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 4x + 2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο Μ(1, 3).

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1}$ = (Β, -Α) = (-8, -6).

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα

$\overrightarrow{\delta_2}$ = (Β, -Α) = (-λ + 2, -2λ - 1).

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} \,//\, \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda + 2 & -2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

16λ + 8 – 6λ + 12 = 0 ⇔ 10λ = -20 ⇔ λ = -2.

Για λ = -2 από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: -3x + 4y – 9 = 0.

Άρα ε: -3x + 4y – 9 = 0 είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): 6x-8y+3=0, οπότε $d(M, \zeta) = \frac{|6\cdot1-8\cdot3+3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ .