ΛΥΣΗ

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$\begin{cases} x=\mu-1 \\ y=3\mu-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=x+1 \\ y=3(x+1)-2 \\ \mu\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ \mu=x+1 \\ \mu\in R \end{cases}$, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η AB // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3\cdot1+1$.

Άρα το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu-2, 3\mu-1)$, οπότε:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu-2 & 3\mu-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}|1(3\mu-1)-3(\mu-2)| = \frac{1}{2}|3\mu-1-3\mu+6| = \frac{1}{2}|5| = \frac{5}{2}$, σταθερό για κάθε $\mu\in R$.

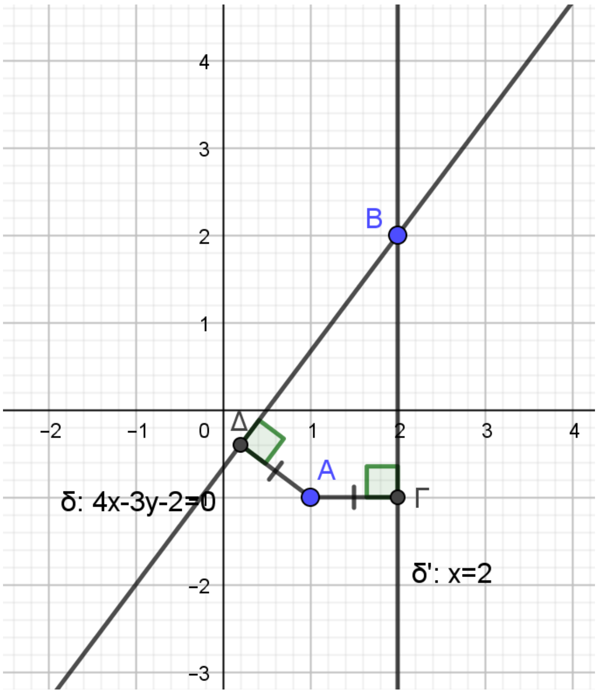
Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην ΑΒ, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και ΑΒ. Επίσης το μήκος του ΑΒ είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο B(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ': x = 2 και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή

δ: y - 2 = λ(x - 2) ή δ: λx - y + 2 - 2λ = 0.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ': x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \frac{|\lambda\cdot1-1\cdot(-1)+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} = \frac{|\lambda+1+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.



Θέλουμε: $d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |3 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $|3 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 + 1}^2 \Leftrightarrow (3 - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 1$ $\Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι δεκτή.

Για $\lambda = \frac{4}{3}$ η ευθεία δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - 2\frac{4}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - \frac{8}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3} = 0$ ή δ: $4x - 3y - 2 = 0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.