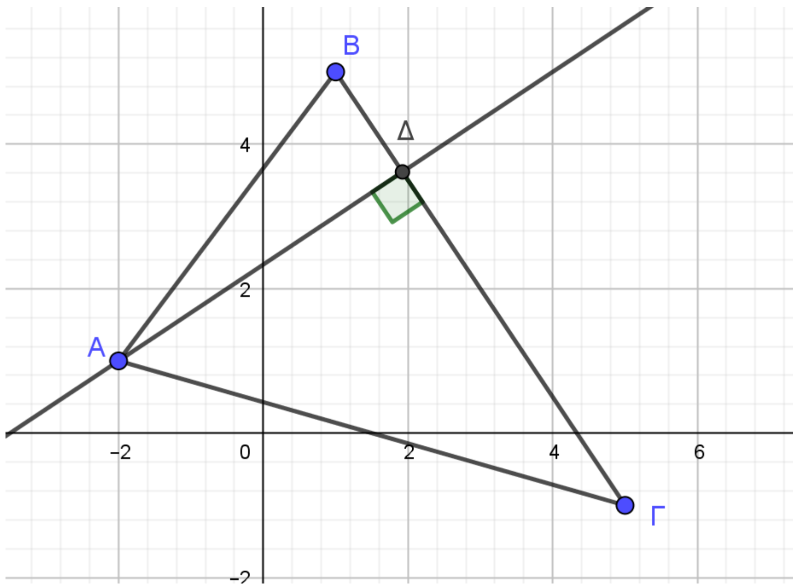
ΛΥΣΗ




α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ = (1-(-2), 5-1) = (3, 4) και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A)$ = (5-(-2), -1-1) = (7, -2), οπότε: (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$ =

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|3\cdot(-2)-4\cdot 7| = \frac{1}{2}|-6-28| = \frac{1}{2}|-34| = \frac{1}{2}\cdot 34 = 17.$

β) Είναι ΒΓ: $y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-1-5}{5-1}(x - 1)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-6}{4}(x - 1)$ ή

ΒΓ: $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$ ή ΒΓ: $2y - 10 = -3x + 3$ ή ΒΓ: $3x + 2y - 13 = 0$.

γ) Έστω $\upsilon_\alpha$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ και $\upsilon_\alpha \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha} = \frac{-1}{\lambda_{B\Gamma}} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$. Έτσι

$\upsilon_\alpha$: $y - y_A = \lambda_{\upsilon_\alpha}(x - x_A)$ ή $\upsilon_\alpha$: $y - 1 = \frac{2}{3}(x - (-2))$ ή $\upsilon_\alpha$: $3y - 3 = 2x + 4$ ή $\upsilon_\alpha$: $2x - 3y + 7 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, $\upsilon_\alpha$ έχουμε: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$ .

Επομένως, $Δ(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: (ΜΑΒ) = $\frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$ = (x -(-2), y -1) = (x +2, y - 1), άρα:

(ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = \frac{1}{2} \left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}$ $|3\cdot(y - 1) - 4\cdot(x + 2)| = \frac{1}{2}|3y - 3 - 4x - 8| = \frac{1}{2}|3y - 4x - 11|$, οπότε από την (1) ⇔

$\frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{17}{2}$ ⇔ $|3y - 4x - 11| = 17$ ⇔ $3y - 4x - 11 = -17$ ή $3y - 4x - 11 = 17$ ⇔

$4x - 3y - 6 = 0$ ή $4x - 3y + 28 = 0$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $ε_1$: $4x - 3y - 6 = 0$ ή $ε_2$: $4x - 3y + 28 = 0$.