ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{4-1}{4-1} = 1$ και $\lambda_{\mathrm{B}\Gamma} = \dfrac{1-4}{3-4} = 3$. Αφού $\lambda_{\mathrm{AB}} \neq \lambda_{\mathrm{B}\Gamma}$ τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσον M της $\mathrm{B}\Gamma$ έχουμε $x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\Gamma}}{2} = \dfrac{4+3}{2} = \dfrac{7}{2}$ και $y_{\mathrm{M}} = \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\Gamma}}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2}$. Άρα $\mathrm{M}\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Ακόμα $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\mathrm{B}\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -\dfrac{1}{3}$.

Έχουμε $(\varepsilon): y - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$.

γ) Το σημείο $\mathrm{K}(x, y)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, άρα $\mathrm{K}\left(x, -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(\mathrm{KA}) = (\mathrm{KB}) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 - (x-1)^2 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$-3(2x-5) = -3\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow 2x - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \Leftrightarrow 6x - 15 = 2x - 7 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 .$$

Οπότε $y = -\dfrac{1}{3} \cdot 2 + \dfrac{11}{3} = 3$, δηλαδή $\mathrm{K}(2,3)$.

Το $\mathrm{K}(2,3)$ ως σημείο της μεσοκαθέτου του $\mathrm{B}\Gamma$ ισαπέχει από τα άκρα του B και Γ, επιπλέον $(\mathrm{KA}) = (\mathrm{KB})$, άρα τελικά $(\mathrm{KA}) = (\mathrm{KB}) = (\mathrm{K}\Gamma)$, οπότε το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.