ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right| = 12$, άρα $\left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right| = 24$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε $|12(x+2) - 9(y+3)| = 24 \Leftrightarrow 3|4(x+2) - 3(y+3)| = 24$, άρα $|4x+8 - 3y - 9| = 8 \Leftrightarrow |4x - 3y - 1| = 8$. Τελικά έχουμε:
$4x - 3y - 1 = 8$ ή $4x - 3y - 1 = -8$, δηλαδή $4x - 3y = 9$ ή $4x - 3y = -7$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

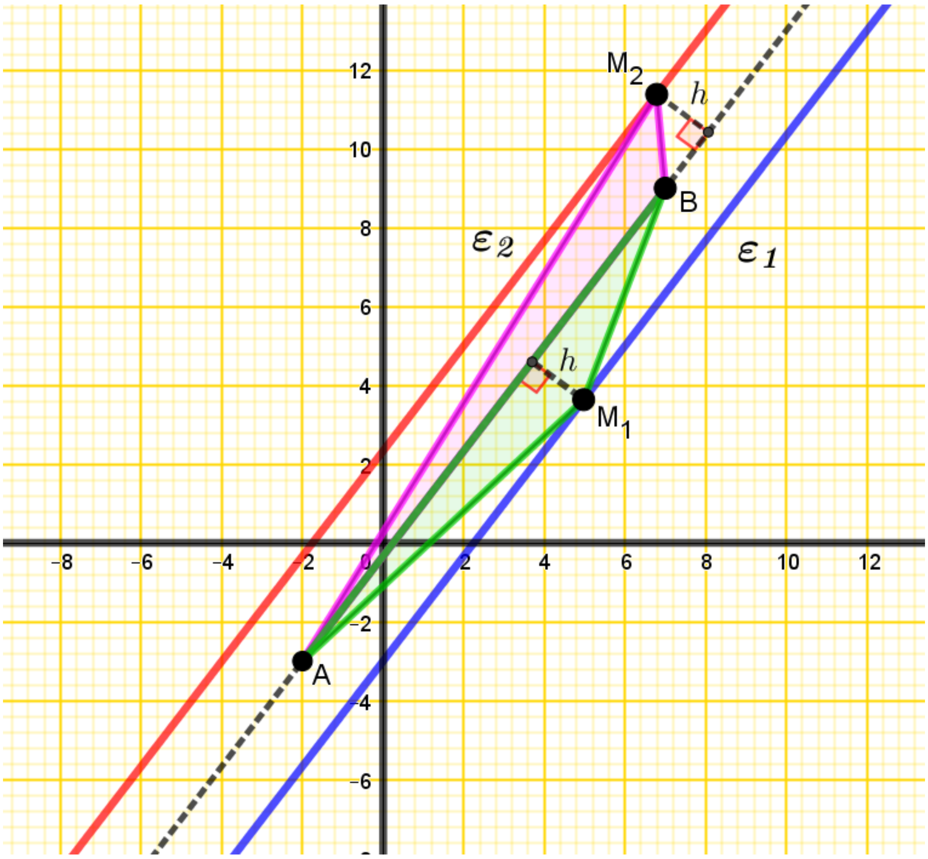
Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{3}$.

β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-(-3)}{7-(-2)} = \frac{4}{3}$, άρα η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2). Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2). Για ευκολία βρίσκουμε το μέσο του ΑΒ που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Τώρα $d(K,\varepsilon_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 - 9\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$ και $d(K,\varepsilon_2) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3+7\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$

γ) Με βάση το παρακάτω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου ΑΜΒ που αντιστοιχεί στην ΑΒ είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των (ε_1) και (ε_2), οπότε $(AM_1B) = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot h = \frac{1}{2}\cdot 15 \cdot \frac{8}{5} = 12$, αφού

$AB = \sqrt{(7+2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{225} = 15$. Ανάλογα, $(AM_2B) = 12$, έτσι $(AM_1BM_2) = 24$. Ώστε $(AXBY) = 24$ για οποιαδήποτε σημεία Χ,Υ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{B}, \mathrm{M}_2$ συνευθειακά). Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα ΑΧΒΥ με σταθερό εμβαδόν 24.



M2
h
B
ε2
ε1
h
M1
A