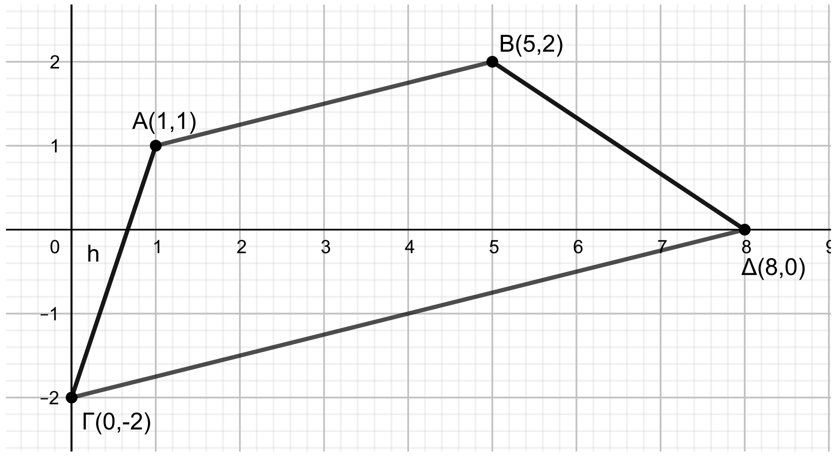
ΛΥΣΗ



α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{0+2}{8-0}=\frac{1}{4}$. Άρα ΑΒ // ΓΔ.

$\lambda_{A\Gamma}=\frac{-2-1}{0-1}=3$ και $\lambda_{B\Delta}=\frac{0-2}{8-1}=-\frac{2}{7}$. Άρα $\lambda_{A\Gamma} \neq \lambda_{B\Delta}$ και οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι παράλληλες.

β) Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ έχουμε: (ΑΒΔΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$ και έχουμε:

$\overrightarrow{A\Gamma}$ = (0-1,-2-1) = (-1,-3)

$\overrightarrow{A\Delta}$ = (8-1, 0-1) = (7,-1)

$\overrightarrow{AB}$ = (5-1, 2-1) = (4,1)

$\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta})=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 22$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -11$

$(AB\Delta) = \frac{1}{2} \mid \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}) \mid = \frac{11}{2}$ τ.μ. και $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \mid \det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}) \mid = 11$ τ.μ.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται: $(AB\Delta\Gamma) = \frac{11}{2} + 11 = \frac{33}{2}$ τ.μ.